

# Graphische Datenverarbeitung 2

Dr. Niklas Peinecke

Welfenlab  
Fachgebiet Graphische Datenverarbeitung  
Universität Hannover

11. Juli 2006

# Inhalt

- 1 Literatur
- 2 Graphische Datenverarbeitung
- 3 Form-Analyse und -Klassifikation
  - Homologietyp
  - Homöomorphietyp
  - Homotopie
  - Diffeomorphietyp
  - Isometrietyp
  - Form-Klassifikation
- 4 Morse-Theorie
- 5 Distanzberechnungen
- 6 Fraktale
  - Motivation
  - Grundbegriffe
  - Kapazitätsdimension
  - Topologische Dimension

# Literatur

- R. Stöcker, H. Zieschang: Algebraische Topologie, Teubner, Stuttgart 1994
- J.W. Bruce, P.J Giblin, Curves and Singularities, 2nd edition, Cambridge University Press, 1992
- Gerald A. Edgar: Measure, topology, and fractal geometry, Corr. 3. print, Springer, 1995
- Stéphane Mallat: A Wavelet Tour of Signal Processing, 2nd Edition, Academic Press, 1999
- Eric J. Stollnitz, Tony D. DeRose, David H. Salesin: Wavelets for computer graphics, Morgan Kaufmann, 1996

# Was ist GDV?

Wikipedia sagt:

Die Grafische Datenverarbeitung (GDV) ist ein Teilbereich der Informatik. Sie umfasst unter Anderem die **Computergrafik** und **Visualisierung**, die **Geometrische Modellierung**, die **Bildverarbeitung** sowie Teile der **Mustererkennung und der Szenenanalyse**.

Aus unserer Sicht fehlt noch die **berechnende Geometrie**.

# GDV am FG GDV

Forschung am FG GDV der Universität Hannover hauptsächlich:

- Geometrisches Modellieren
- Berechnende Geometrie

Sowie in Teilbereichen:

- Visualisierung
- Bildverarbeitung
- Mustererkennung

## Forschung von Prof. Wolter

- Ursprüngliches und gegenwärtiges Hauptforschungsgebiet: Geometrisches Modellieren von Freiformobjekten basierend auf Splines (z.B. Hauptkrümmungslinien, Geodätische).
- Am MIT ab 1989 Entwicklung von Methoden zur Darstellung, Untersuchung, Manipulation von Freiformflächen
- Mitentwicklung des Freiform-Modelliersystems *Praxiteles* für die US-Navy

## Beiträge von Prof. Wolter

- Flächenverschneidungsalgorithmen
- Konstruktion von krümmungsstetigen Blendflächen
- Distanzberechnungen auf Flächen
- Approximation stetiger Kurven
- Flächenkrümmungsberechnung bei degenerierter Parametrisierung
- Grundlagenentwicklung zum Konzept der medialen Achse

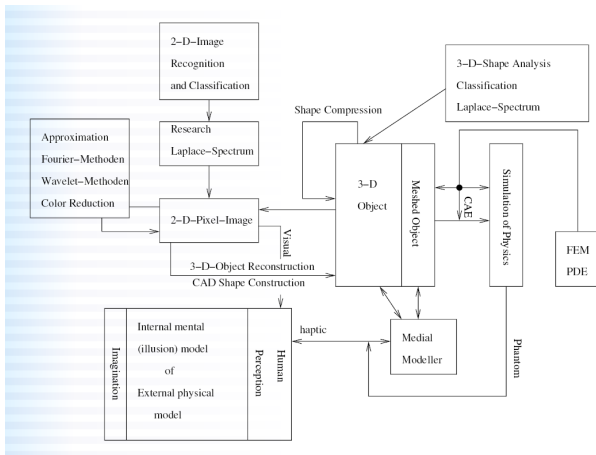
## GDV am FG GDV

Seit 1996:

- Effiziente Berechnung orthogonaler Projektionskurven
- Berechnung von Nabelpunkten (Umbilics) auf Flächen
- Kriterien für Krümmungsstetigkeit beliebig hoher Ordnung bei Blindflächen
- Distanzberechnungen und Fokal-Flächen
- Spektrale Flächeninvarianten (Laplace-Beltrami-Operator)



# Beziehungen der Konzepte



# Was ist Form?

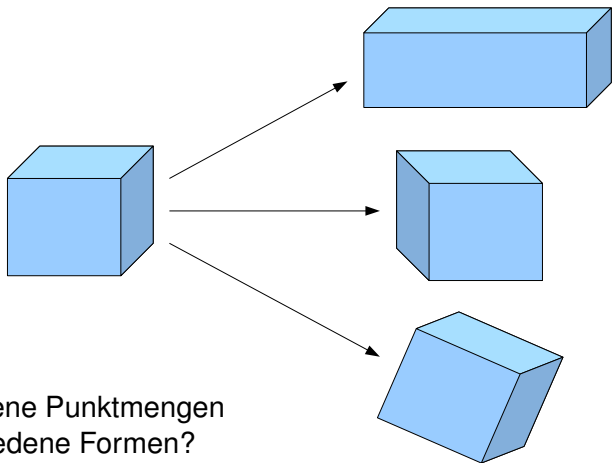
Erste Annäherung:

## Definition

Eine **Form** bezeichnet eine Punktmenge, also eine Teilmenge eines (euklidischen) Raums.

**ACHTUNG:** Diese Definition hat ihre Probleme!

# Was ist Form?



Verschiedene Punktmengen  
⇒ verschiedene Formen?

# Kongruenz

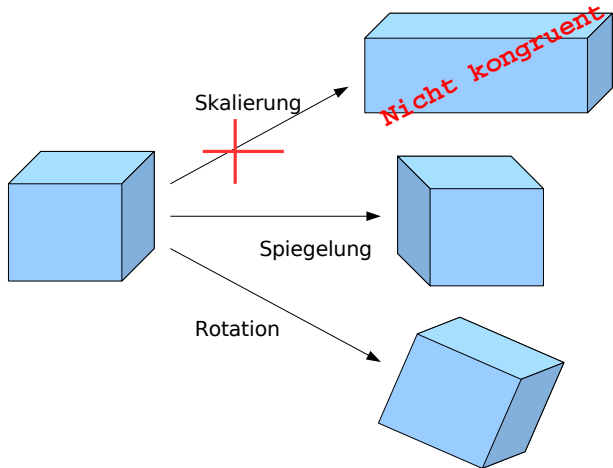
## Definition

Zwei Punktmenge n heißen **kongruent**, wenn sie durch eine euklidische Abbildung (Translation, Rotation, evtl. Spiegelung) auseinander hervorgehen.

## Beispiel

$\{(0, 0), (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$  und  $\{(0, 0), (1, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$  sind kongruent, da sie durch die Rotation um  $90^\circ$  auseinander hervorgehen.

# Kongruenz

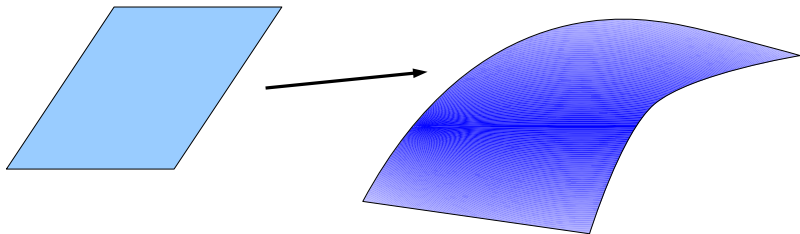


# Kongruenz

## Probleme der Kongruenz:

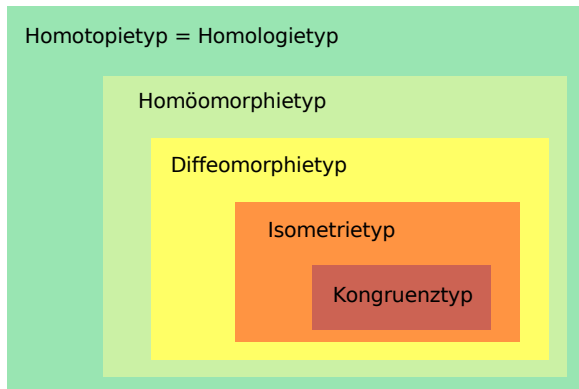
- 1 Meist schwer zu berechnen, zumal, wenn die Punktmenge durch ein kompliziertes Objekt definiert wird, denn:
- 2 Man kann ja nicht alle möglichen Abbildungen durchprobieren!
- 3 In manchen Fällen zu restriktiv: z.B. bei Skalierung oder Verbiegen

# Kongruenz



Ein verbogenes Blatt Papier: „gleich“ aber nicht kongruent

# Klassifikationsmöglichkeiten



Verschiedene Möglichkeiten zur Abschwächung der Kongruenz



# Simplizes

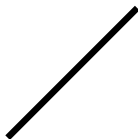
## Definition

Seien  $p_0, \dots, p_k \in R^n$  jeweils  $k + 1$  linear unabhängige Punkte. Dann heißt die konvexe Hülle von  $p_0, \dots, p_k \in R^n$   **$k$ -Simplex**. Die konvexe Hülle jeder Teilmenge von  $\{p_0, \dots, p_k\}$  heißt **Teilsimplex** des Simplex.

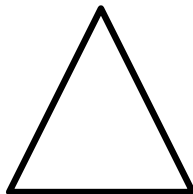
# Simplizes



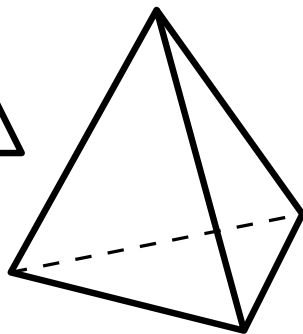
0-Simplex: Punkt



1-Simplex: Strecke



2-Simplex: Dreieck



3-Simplex: Tetraeder

# Simplizialkomplexe

Simplizes sind unsere „Bausteine“:

## Definition

Eine Menge von  $k$ -Simplizes heißt **Simplizialkomplex**, gdw. der Schnitt von je zwei Simplizes entweder leer ist, oder ein Teilsimplex beider Simplizes.

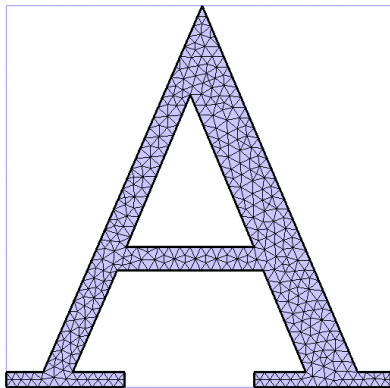
$k$  heißt **Dimension** des Simplex und des Simplizialkomplexes.

2-Simplizialkomplexe heißen auch **Triangulierungen**,

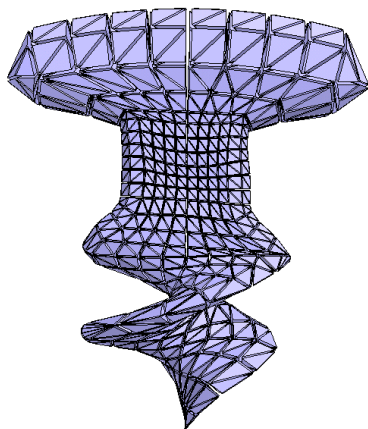
3-Simplizialkomplexe heißen auch **Tetraedisierungen**.

# Simplizialkomplexe

Triangulierung



Tetraedisierung



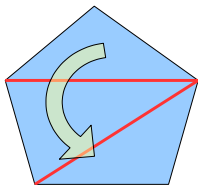
# Homologietyp

## Definition

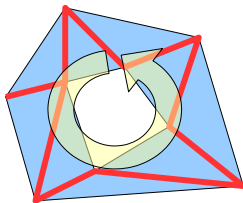
Sei zu einem  $k$ -dimensionalen Gebiet eine Simplicialzerlegung  $S$  gegeben, derart, dass alle 0-Simplizes auf dem Rand des Gebiets liegen (keine inneren Punkte).

Ein **Kreis** sei eine Sequenz von Simplizes, in der jeder Simplex mit seinem Vorgänger mindestens einen  $k - 1$ -Teilsimplex gemeinsam hat, und der erste mit dem letzten ebenfalls einen  $k - 1$ -Teilsimplex gemeinsam hat. Desweiteren sei die Sequenz so konstruiert, dass kein  $k - 1$ -Teilsimplex doppelt durchlaufen wird. Die Anzahl der bis auf Umlaufsinn verschiedenen Kreise heißt dann **Homologietyp** des Gebiets.

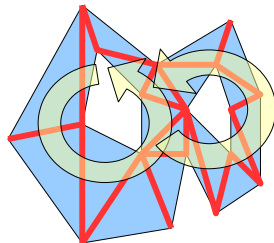
# Homologietyp



Kein Kreis  
Typ 0



Ein Kreis  
Typ 1



Zwei Kreise  
Typ 2

# Homologietyp

## Was ist mit nicht-polygonalen Gebieten?

Diese lassen sich nicht als Simplicialkomplexe darstellen.

### Definition

Seien  $G$  und  $H$  zwei Gebiete. Dann heißen  $G$  und  $H$  **homöomorph**, gdw. es einen Homöomorphismus gibt, eine bijektive, stetige Abbildung von  $G$  nach  $H$ , deren Umkehrabbildung auch stetig ist.

# Homologietyp

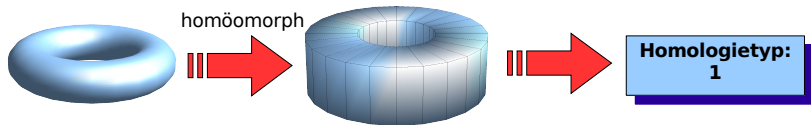
- Homöomorphie beschreibt eine Art „elastische Deformation“.
- Zu jedem Punkt von  $G$  gibt es einen Punkt von  $H$ , und die Nachbarschaften bleiben erhalten.
- Jedes echte Dreieck in der Ebene ist zu jedem anderen echten Dreieck in der Ebene homöomorph.
- Das Einheitsquadrat ist zum Einheitskreis homöomorph.



# Homologietyp

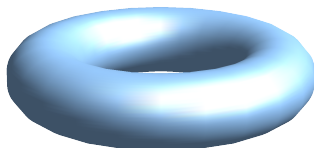
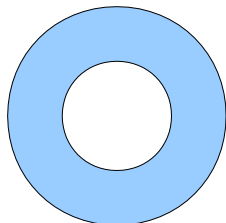
## Definition

Der **Homologietyp** eines beliebigen Gebiets ist der Homologietyp eines homöomorphen Simplicialkomplexes.



# Homöomorphietyp

Restriktiver als Homologie ist Homöomorphie:



Kreisring (2D) und Torus (3D) haben denselben Homologietyp,  
sind aber nicht **homöomorph**!

# Homotopie

Welche Art von Abbildungen lässt den Homologietyp unverändert?

## Definition

Seien zwei Gebiete  $G$  und  $D$  des  $\mathbb{R}^n$  gegeben. Es sei die Dimension von  $D$  kleiner als die von  $G$ . Dann heißt  $G$  **zusammenziehbar** auf  $D$ , wenn es eine stetige Familie von Homöomorphismen  $f_d : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $d \in [0, 1)$  gibt, so dass

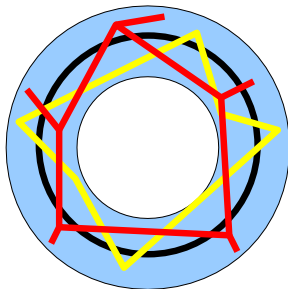
$$f_0(G) = G \wedge \lim_{d \rightarrow 1} f_d(G) = D$$

Hat  $D$  unter allen Gebieten auf die  $G$  zusammenziehbar ist minimale Dimension, dann heißt es auch **Deformationsretrakt** von  $G$ .

# Deformationsretrakte und Homotopie

- **ACHTUNG:** Ein Deformationsretrakt ist nicht eindeutig definiert!
- Den Begriff der *Dimension* werden wir später genauer untersuchen. Vorläufige Definition: Dimension eines homöomorphen Simplicialkomplexes.

Deformationsretrakte  
des Kreisrings



# Homotopie-Äquivalenz

## Definition

Zwei Gebiete  $G$  und  $H$  heißen **homotopie-äquivalent**, gdw. es eine gemeinsame Obermenge  $\mathcal{G}$  gibt, die auf  $G$  und  $H$  zusammenziehbar ist.

## Satz

Zwei Gebiete im  $\mathbb{R}^2$  sind genau dann homotopie-äquivalent, wenn sie den selben Homologietyp haben.

Achtung: Dieser Satz gilt nur im  $\mathbb{R}^2$ !

# Homotopie-Äquivalenz

Homotopie-äquivalente Gebiete:



(Alle vom Homologietyp 2)

# Diffeomorphismus

## Definition

Eine Abbildung  $f : A \rightarrow B$  heißt **Diffeomorphismus**, wenn sie

- 1 invertierbar und
- 2 stetig-differenzierbar ist, und
- 3  $f^{-1}$  auch stetig-differenzierbar ist.

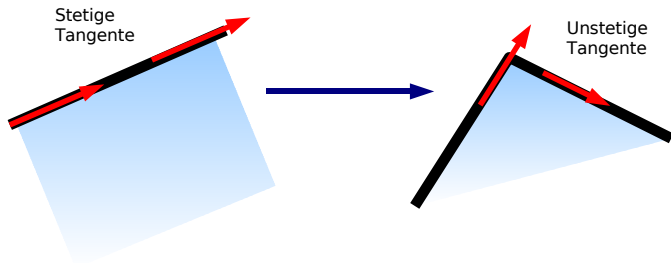
$A$  und  $B$  sind dann **diffeomorph**.

# Diffeomorphismus

## Lemma

Ein Diffeomorphismus bildet jede stetig-differenzierbare Kurve in  $A$  auf eine stetig-differenzierbare Kurve in  $B$  ab.

Hiermit kann man zeigen, dass ein glatter Rand in  $A$  nie in  $B$  „geknickt“ werden kann (und umgekehrt):

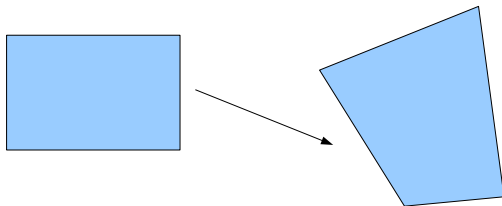




# Diffeomorphietyp

Konsequenz des Lemmas:

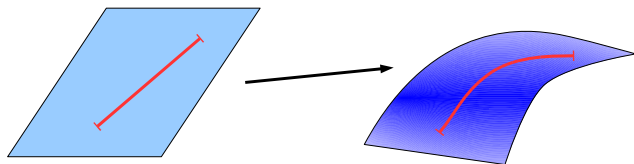
**Nur „gleichartige“ Polygone sind diffeomorph.** (Anzahl der Ecken, Homologietyp)



# Problem der Kongruenz

Wir erinnern uns: Ein „verbogenes“ Rechteck ist nicht kongruent zu seinem Original.

Aber: Jede Strecke auf der Oberfläche behält ihre (geodätische) Länge.



# Isometrie

## Definition

Sei  $f : M_1 \rightarrow M_2$  eine Abbildung von einem metrischen Raum  $M_1$  in einen metrischen Raum  $M_2$ .  $f$  ist eine **Isometrie**, wenn für alle  $x, y \in M_1$  gilt:

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$$

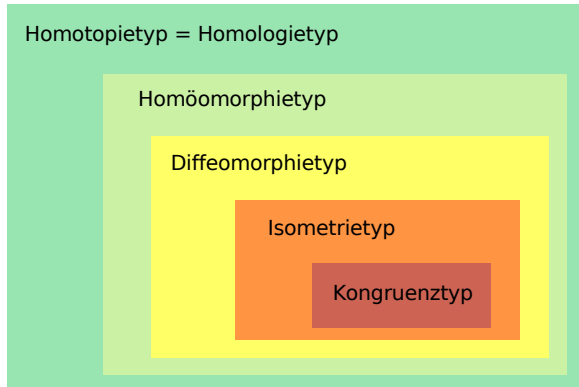
$A$  und  $B$  haben denselben Isometrietyp, wenn es eine Isometrie  $f$  gibt mit  $f[A] = B$ .

# Isometrie

Einige Größen, die unter Isometrien gleich bleiben  
**(Invarianten):**

- Flächeninhalt/Volumen
- Kurvenlängen, Winkel zwischen Kurven
- Gauß-Krümmung
- Spektrum des Laplace-Beltrami-Operators
- ...

# Klassifikationsmöglichkeiten



Wir erhalten diese Hierarchie der Formtypen

# Form

Wir gelangen zu folgender Definition von **Form**:

## Definition

Eine **Form** ist eine Äquivalenzklasse bezüglich einer (formbezogenen) Äquivalenzrelation auf der Menge aller Gebiete eines gewählten Raums.

Als Äquivalenzrelationen kommen die erwähnten Typen (Homologietyp, Homöomorphietyp, Diffeomorphietyp, Isomorphietyp, Kongruenztyp) in Frage.

Die Definition von Form hängt also von der Anwendung und dem gewählten, dazu passenden Formtyp ab!

# Form-Klassifikation

## Problem

Zentrales Problem der Form-Klassifikation in der Anwendung:  
Der tatsächliche Formvergleich. Welche effizienten Algorithmen  
sind dazu geeignet?

1-zu-1-Vergleich der Punkte ist meist zu aufwändig.

# Form-Klassifikation

Einfaches Ausschlusskriterium: **Invarianten**

Vorgehen: Wähle eine leicht zu berechnende, leicht zu vergleichende Invariante für den jeweiligen Formtyp.

Vergleiche statt der Punktmenge selbst die Invariante.

Beispiel: Kongruenz

Der Flächeninhalt ändert sich nicht unter Kongruenz und ist relativ einfach zu berechnen. Unterscheiden sich zwei Formen schon in ihrem Flächeninhalt, so können sie nicht kongruent sein. Es erübrigt sich die aufwändige Suche nach einer Kongruenz.



# Euler-Charakteristik

## Definition

Es sei zu einem Gebiet  $G$  ein Simplicialkomplex gegeben. Dieser bestehe aus  $a_n$   $n$ -Simplizes,  $a_{n-1}$   $n - 1$ -Teilsimplizes, ...,  $a_0$  0-Teilsimplizes. Dann sei

$$\varepsilon(G) := \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i$$

die Euler-Charakteristik von  $G$ .

Die Euler-Charakteristik ist nicht von der gewählten Simplicialzerlegung, sondern nur vom Gebiet abhängig.

Sie ist eine Homöomorphie-Invariante.

# Laplace-Operator

## Definition

Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit (hier meist eine Fläche),  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine skalare Funktion auf  $M$ .

Dann sei durch

$$\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f$$

(Divergenz des Gradienten) der **Laplace-Operator**  $\Delta$  auf  $M$  erklärt.

# Laplace-Operator

Ist  $M$  ein planares Flächenstück, so gilt

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

Ist  $M$  eine nicht planare Fläche mit erstem Fundamentaltensor  $(g_{ij})$ , dann gilt

$$\Delta f = \sum_{i,j} g^{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)$$

Wir nennen den Operator dann auch  
**Laplace-Beltrami-Operator.**

# Laplacesche Eigenwertaufgabe

## Definition

Die Lösungen  $\lambda$  der Differentialgleichung

$$\Delta f = \lambda f$$

heißen **Laplace-Eigenwerte** einer Mannigfaltigkeit  $M$ .

Die Menge aller dieser Lösungen  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$  ist unendlich. Jeder Eigenwert ist eine Isometrie-Invariante für die Mannigfaltigkeit (Fläche)  $M$ , ändert sich also nicht unter Isometrien.

Das **Spektrum**  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$  ist also auch zur Form-Klassifikation geeignet.

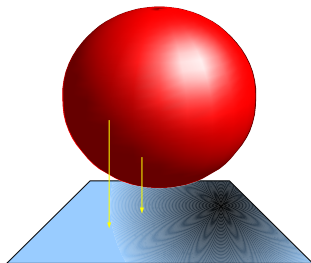
# Laplace-Spektrum

Interessante Eigenschaften des Laplace-Spektrums:

- Isometrie-Invariante
- Mit Tricks: sogar Skalierungsinvariante
- Ändert sich stetig bei stetiger Änderung der Form
- Ist eindeutig (**Isometrie-Charakteristikum**) für Kugeln, Kreise, ... und für viele andere Formen

# Morse-Funktion

Es sei eine 2-Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^3$  gegeben.  
(Beispiel: Kugel)

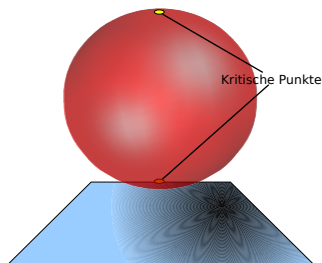


Definiere eine glatte Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , die zu jedem Punkt auf  $M$  die Höhe (also die  $z$ -Koordinate) angibt.

# Morse-Funktion

## Definition

Ein Punkt  $p \in M$  heißt **kritischer Punkt** von  $f$ , wenn alle Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial x_i} f(p) = 0$  sind.



In unserem Beispiel hat die Kugel zwei kritische Punkte: Nord- und Südpol

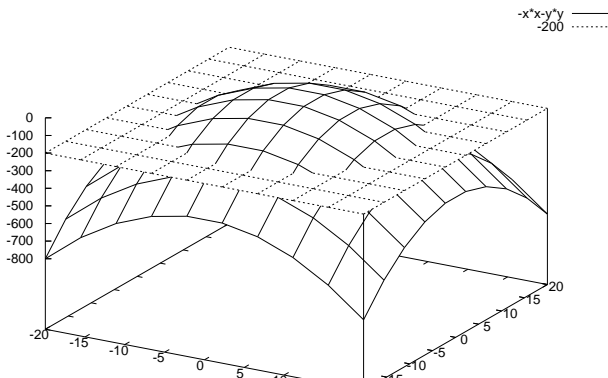
# Anwendungen der Morse-Theorie

- Hat die **Hessesche**, die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen  $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ , in jedem kritischen Punkt vollen Rang, so lassen sich aus bestimmten Kennzahlen (Indizes) der kritischen Punkte z.B. die Euler-Charakteristik berechnen.
- Diese Kenntnisse über die kritischen Punkte lassen sich z.B. bei der Rekonstruktion einer Fläche aus gegebenen Höhenlinien (Isolinien) ausnutzen.



# Schnitt zweier Flächen

Interessant ist z.B. die Berechnung einer *Schnittkurve* zweier Flächen, sofern sie existiert.



# Schnitte und Distanzen

## Definition

Seien  $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  zwei Parametrisierungen zweier Flächen.

$$D(x, y) := \text{dist}(f_2[S], \{f_1(x, y)\})$$

mit

$$\text{dist}(A, B) := \min\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

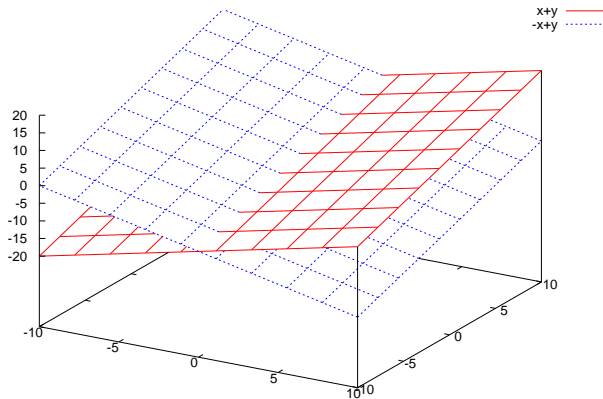
heißt **Distanzfunktion**.

Offensichtlich wird  $D$  minimal, also 0, wenn die zwei Flächen sich schneiden.

# Klassen von Schnitten

- 1 **Transversaler Schnitt** mit einer echten Durchdringung beider Flächen im Schnittort
- 2 **Berührung**, also Schnitt höherer Ordnung

# Transversaler Schnitt



## Transversaler Schnitt

Hier gilt:  $\text{grad } D \neq 0$

Die Schnittkurve ergibt sich dann aus einer Variation des *Satzes über implizite Funktionen*, z.B. Newton-Verfahren.

Es gilt entweder

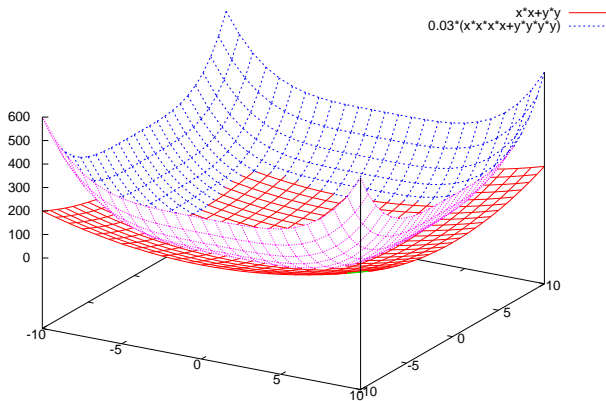
$$y(x) = -\frac{\partial_x D}{\partial_y D}$$

oder

$$x(y) = -\frac{\partial_y D}{\partial_x D}$$

d.h. eine der beiden Koordinatenrichtungen ist über die andere lokal parametrisierbar, also linear approximierbar.

# Berührung



# Berührung

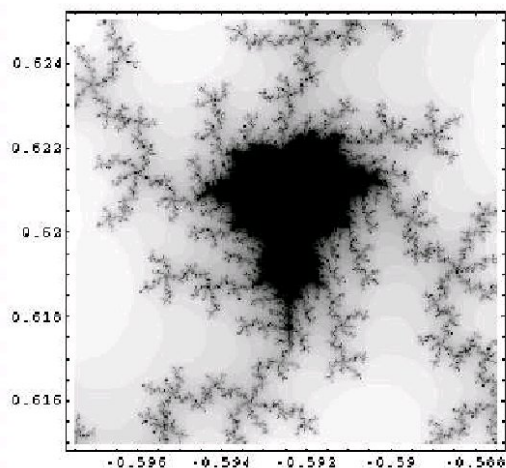
Da kein „echter“ Schnitt vorliegt, gilt  $\text{grad } D = 0$ , der Satz über implizite Funktionen ist nicht anwendbar.

Der Schnittpunkt muss nun durch andere Verfahren, z.B. Approximation höheren Grades bestimmt werden:

$$D(x, y) \approx \text{grad } D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für die **Hessesche**  $A$ , die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen.

# Fraktale



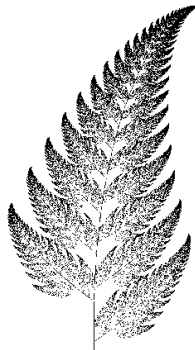
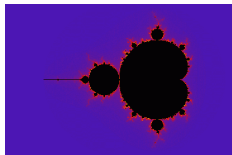


# Warum Fraktale?

Natürliche Formen haben oft eine „fraktale“ Erscheinungsform:

- Geäst von Bäumen und anderen Pflanzen
- Adern und Kapillaren im menschlichen Körper
- Flussläufe im Mündungsbereich
- Küstenformen
- Blitze

# Beispiele



# Struktur

Was ist den genannten natürlichen Formen gemeinsam?

**Strukturelle Selbstähnlichkeit:** Ein kleiner Teilausschnitt der Form hat jeweils große Ähnlichkeit mit größeren Ausschnitten der Form.

„**Gebrochene“ Dimension:** Obwohl die genannten Formen von ihrem Charakter her *linienartig* (eindimensional) sind (Äste, Adern, Flüsse) überdecken sie fast ganze (zweidimensionale) Flächen oder (dreidimensionale) Körper (Volumen des Baums, menschlicher Körper, Mündungsdelta).

# Theorie

Ansätze zur Modellierung solcher Formen:

- Theorie der fraktalen Geometrie
- Theorie nichtlinearer Systeme (Chaostheorie)
- Attraktoren (Gebiete im Phasenraum, die von einem nichtlinearen Prozess nicht mehr verlassen werden)

# Dimension

Wir kennen bereits die **Dimension** eines Simplizialkomplexes oder eines dazu homöomorphen Gebiets.

Diese ist per Definition *ganzzahlig*.

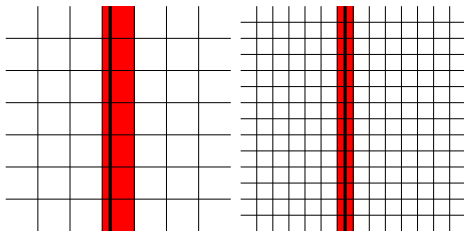
Wir beobachten: Ein „Fraktal“ überdeckt fast ein gesamtes höherdimensionales Gebiet.

Frage: Wie misst man die Dimension eines solchen Gebildes?

# Boxdimension

Gegeben sei eine linienartige Form, eine Kurve auf einem beschränkten Gebiet.

Wir teilen das Gebiet in  $n$  Kästchen ein, und zählen, wie viele Kästchen  $N_\varepsilon$  von der Kurve geschnitten werden.



Links:  $7 \cdot 7 = 49$  Kästchen, 7 geschnitten

Rechts:  $14 \cdot 14 = 196$  Kästchen, 14 geschnitten

# Boxdimension

**Beobachtung:** Unabhängig von der Anzahl der Kästchen  $n$  gilt:

$$\frac{\log N_\varepsilon}{\log n} = \frac{1}{2}$$

Dies leuchtet ein, da die Dimension der Gerade 1 ist, die des umgebenden Gebiets 2.

# Boxdimension

Wir kommen zu folgender Definition:

## Definition

Für ein umgebendes Gebiet  $G$  und Kästchenzahlen  $n$  und  $N_\varepsilon$  heißt

$$\dim G \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N_\varepsilon}{\log n}$$

**Boxdimension** einer Form.



# Boxdimension

Was geschieht, wenn die Boxdimension auf ein wirklich fraktales Gebilde angewandt wird?

Beispiel: Kochsche Schneeflocke



1



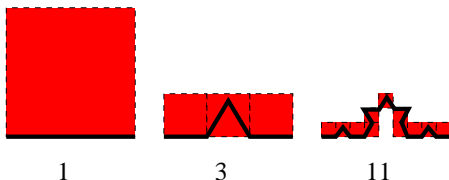
3



11

# Boxdimension

Beispiel: Kochsche Schneeflocke



$$2 \cdot \frac{\log 3}{\log 3^2} = 1$$

$$2 \cdot \frac{\log 11}{\log 3^4} = 1.09133$$

Die Boxdimension scheint also etwas über 1 zu liegen!

# Probleme der Boxdimension

- 1 Die quadratische Form der Kästchen ist praktisch zur Programmierung, erschwert aber die theoretische Analyse.
- 2 Außerdem ist es unpraktisch, immer von der Dimension des umgebenden Raums auszugehen.

# Kapazitätsdimension

Wir verallgemeinern daher den Begriff:

## Definition

Sei  $N_\varepsilon$  die minimale Anzahl kompakter Gebiete mit Durchmesser max.  $\varepsilon$ , um ein Gebiet  $G$  zu überdecken. Dann heißt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon}{-\log \varepsilon}$$

(falls der Grenzwert existiert) **Kapazitätsdimension** von  $G$ .

**ACHTUNG:** Dieser Grenzwert muss nicht existieren! Der Limes superior kann sich vom Limes inferior unterscheiden.

# Kapazitätsdimension

- 1 Die individuelle Form der zur Berechnung der Kapazitätsdimension genutzten Gebiete ist dabei unerheblich: Wählt man z.B. statt Quadrate Kreise, so stehen die Flächeninhalte Quadrat/Kreis in einem festen Verhältnis zueinander. Dies kürzt sich im Quotienten aus der Dimension heraus.
- 2 Ist das Gebiet kompakt, so ist  $N_\varepsilon$  per Definition eindeutig: Kompaktheit heißt, dass es zu jeder offenen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung gibt.
- 3 Offenbar ist die Boxdimension ein Spezialfall der Kapazitätsdimension (*Kästchenzählsatz*).

# Kapazitätsdimension

Berechnung der Kapazitätsdimension der Kochkurve über *kreisförmige* Überdeckungsgebiete:

In jeder Iteration  $k$  vervierfacht sich die Anzahl der Gebiete, während ihr Radius (Seitenlänge) drittelt. Es ergibt sich:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 4^k}{-\log 1/3^k} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.26186$$

# Kapazitätsdimension

Wir lernen: Die Kochkurve hat eine Kapazitätsdimension, die etwas über 1 liegt, aber deutlich unter 2.

Dies entspricht unserer Intuition: Sie ist mehr als eine Linie, aber deutlich weniger als eine Fläche.

# Fraktal

Die Kapazitätsdimension ist eine **maßtheoretische** Dimension, wogegen unsere „herkömmliche“ Dimension eine **topologische** Dimension ist (unter anderem, weil sie eine topologische – also Homöomorphie-Invariante ist).

Dies motiviert die Definition:

## Definition

Ein Fraktal ist ein Gebiet, dessen maßtheoretische Dimension ungleich seiner topologischen Dimension ist.

Die maßtheoretische Dimension ist dann ein Bruch, also im wörtlichen Sinn fraktal!



# Dimensionen

## **Bemerkung:**

Es gibt mehrere Möglichkeiten, topologische und maßtheoretische Dimensionen zu definieren, die Kapazitätsdimension ist nur eine Möglichkeit.  
Wir werden noch mehrere Beispiele sehen.

# Was ist überhaupt ein Durchmesser?

Zur Berechnung der Kapazitätsdimension wird ein „Durchmesser“  $\varepsilon$  einer Familie von Überdeckungsmengen gebraucht.

Dieser Durchmesser kann nur mittels einer **Metrik** definiert werden, wir brauchen einen **metrischen Raum**:

## Definition

Eine Menge  $M$  mit einer Abbildung  $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$  heißt **metrischer Raum**, falls für  $d$  gilt:

Symmetrie  $d(x, y) = d(y, x)$

Definitheit  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Dreiecksungleichung  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

# Beispiele für metrische Räume

Aus einer Norm  $\| \cdot \|$  kann man immer eine Metrik erstellen durch:

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

Umgekehrt geht dies meist nicht!

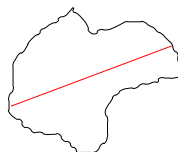
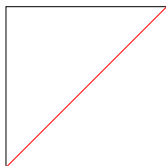
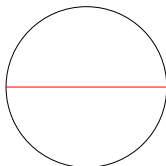
Auch für unendlich-dimensionale Räume gibt es Metriken, z.B. die **Supremumsmetrik** auf dem Raum der auf  $[a, b]$  stetigen Funktionen:

$$d(f, g) := \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

# Was ist überhaupt ein Durchmesser?

Den Durchmesser einer Menge  $G$  kann man nun erklären durch:

$$\emptyset := \sup_{x,y \in G} d(x,y)$$



## Beispiele zur Kapazitätsdimension

Die Kapazitätsdimension kann *unabhängig vom einbettenden Raum* berechnet werden:

Für das Einheitsintervall  $I = [0, 1]$  gilt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon}{-\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon}{-\log 1/N_\varepsilon} = 1$$

Für das Einheitsquadrat gilt:

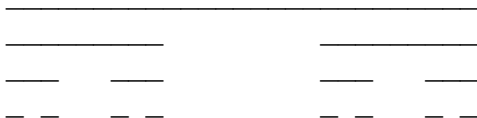
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon}{-\log \varepsilon} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{1/2^k}}{-\log 1/2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(2^k)^2}{\log 2^k} = 2$$

# Beispiele zur Kapazitätsdimension

## Weiteres Beispiel: **Cantorsches Diskontinuum**

Prinzip:

- 1 Teile das Einheitsintervall in drei Teile,
- 2 entferne den mittleren Teil,
- 3 verfähre rekursiv mit den übrigen beiden Teilen.



# Beispiele zur Kapazitätsdimension

Eigenschaften des Cantorschen Diskontinuums:

- Die Grenzmenge enthält **überabzählbar unendlich** viele Punkte,
- ist also gleichmächtig mit dem Einheitsintervall.  
Beweisidee: Jeder Punkt ist durch binäre Brüche wohldefiniert.
- Die Grenzmenge besteht nur aus isolierten Punkten,
- das heißt, ihre topologische Dimension ist Null (das werden wir noch zeigen).
- Die Menge ist nicht *dicht*, wie etwa  $\mathbb{Q}$ , da es im Intervall  $[1/3, 2/3]$  z.B. gar keine Punkte gibt.
- Es gibt keine stetige Funktion von  $[0, 1]$  auf das Diskontinuum.

# Beispiele zur Kapazitätsdimension

Kapazitätsdimension des Cantorschen Diskontinuums:

In jedem Iterationsschritt wird die Länge der überdeckenden Intervalle gedrittelt, für die Anzahl gilt:  $N_{i+1} = 2N_i - 1$ , sie wird offenbar verdoppelt.

Man erhält:

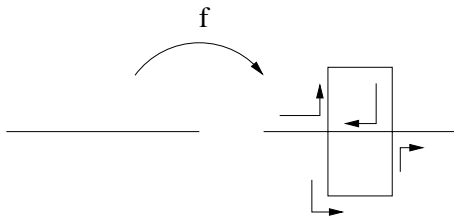
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^k} = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.63093$$



# Beispiele zur Kapazitätsdimension

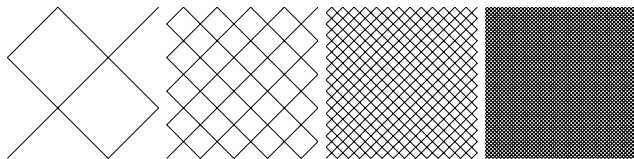
Kann eine Kurve das Einheitsquadrat komplett ausfüllen?

Die Peano-Kurve: Konstruktion



# Beispiele zur Kapazitätsdimension

Die ersten vier Iterationen:



# Beispiele zur Kapazitätsdimension

## Eigenschaften der Peano-Kurve:

- Beginne mit der Diagonale des Einheitsquadrates.
- Jedes Streckenstück wird gemäß der Iteration  $f$  durch 9 neue Streckenstücke ersetzt.
- In jedem Iterationsschritt verdreifacht sich die Länge der Kurve,
- die Grenzkurve ist also unendlich lang.
- Die Länge der Streckenstücke wird gedrittelt.

# Beispiele zur Kapazitätsdimension

Kapazitätsdimension der Peano-Kurve:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 9^k}{-\log 1/3^k} = \frac{\log 9}{\log 3} = 2$$

Die Kurve füllt also das Quadrat *in jeder Hinsicht aus*: Sie ist eine (maßtheoretisch) *zweidimensionale* Kurve!

# Topologie

Um uns dem Begriff der topologischen Dimension zu nähern, benötigen wir zunächst eine Definition für **Topologie**:

## Definition

Sei  $T$  eine Menge,  $\tau \subset \mathfrak{P}(T)$ .

$\tau$  heißt **Topologie** von  $T$ , falls:

- 1  $T, \emptyset \in \tau$
- 2  $X \cap Y \in \tau$  für alle  $X, Y \in \tau$
- 3 Für jede Familie  $(X_\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda$  gilt:  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \in \tau$

Eine Teilmenge  $\mathcal{O} \subseteq T$  heißt dann **offen**, falls gilt  $\mathcal{O} \in \tau$ .

# Topologie auf $\mathbb{R}$

Einfaches Beispiel: Auf  $\mathbb{R}$  stellt die Menge aller offenen Mengen eine Topologie dar.

Sie wird wie folgt gebildet:

- Jedes Intervall  $(a, b)$  sei Element von  $\tau$ .
- Für je zwei Elemente  $X, Y$  sei  $X \cap Y$  Element von  $\tau$ .
- Jede beliebige (auch unendliche) Vereinigung von Elementen sei wieder Element von  $\tau$ .

Man sagt auch, dass die Topologie durch **topologischen Abschluss** der Intervalle gebildet wird.

# Topologie auf $\mathbb{R}$

Diese einfache Topologie erhält man auch durch die Forderung, dass jeder Punkt eine echte Umgebung haben muss:

$$\forall x \in \mathcal{O} \exists r > 0 : \{y : d(x, y) < r\} \subseteq \mathcal{O}$$

Man kann sogar für  $d$  andere Metriken einsetzen, man erhält dadurch die „Intervall“-Topologien für beliebige metrische Räume.

# Relative Topologie

Hat man auf einem übergeordneten Raum bereits eine Topologie gegeben, so erhält man leicht eine **relative Topologie** auf jedem Teilraum:

Sei  $(T, \tau)$  ein topologischer Raum.

Es sei  $\bar{T} \subset T$  und  $\bar{\tau} := \{X \cap \bar{T} : X \in \tau\}$

Dann ist auch  $(\bar{T}, \bar{\tau})$  ein topologischer Raum.



# Subbasis und Basis

Es sei  $F \subset \mathfrak{P}(T)$  eine Menge von Teilmengen von  $T$ .

Hierzu gibt es eine kleinste (sprich: schwächste) Topologie  $\tau$ , die  $F$  gerade so umfasst: Jede andere Topologie, die  $F$  enthält, enthält auch  $\tau$  ganz.

Man erhält  $\tau$  durch topologischen Abschluss,  $F$  heißt dann **Subbasis** von  $\tau$ .

Muss man hierzu nicht schneiden, so heißt  $F$  sogar **Basis** von  $\tau$ .

Die Menge aller offenen Intervalle bildet eine Basis unserer „Intervall“-Topologie.

# Offen, abgeschlossen, abgeschlossen

- Alle Elemente der Topologie heißen **offene Mengen**.
- Ist das Komplement einer Menge offen, so heißt sie **abgeschlossen**.
- Daraus ergibt sich, dass es Mengen geben kann, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, z.B.  $\mathbb{R}$  und  $\emptyset$ . Diese heißen **abgeschlossen**.

# Kleine induktive Dimension

Wir können nun einen topologischen Dimensionsbegriff geben:

## Definition

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum.

$$\text{ind}(M) = -1 :\Leftrightarrow M = \emptyset$$

$\text{ind}(M) = 0 :\Leftrightarrow M \neq \emptyset$  und es gibt eine Basis für die Topologie in  $M$ , deren Elemente abgeschlossen sind.

$\text{ind}(M) \leq k :\Leftrightarrow$  Es existiert eine Basis für die Topologie, für deren Elemente  $U$  gilt:  
 $\text{ind}(\partial U) \leq k - 1.$

# Kleine induktive Dimension

## Definition

Eine Menge  $M$  heißt nun  **$k$ -dimensional**, wenn  $\text{ind}(M) \leq k$  gilt, aber nicht  $\text{ind}(M) \leq k - 1$ .

# Kleine induktive Dimension

Beispiel: Sei  $M = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$  eine Menge isolierter Punkte.

$(M, \tau)$  mit  $\tau := \mathfrak{P}(M)$  ist ein topologischer Raum, da  $\tau$  als relative Topologie zur „Intervall“-Topologie von  $\mathbb{R}$  erklärt werden kann.

Eine Basis von  $\tau$  in z.B.  $M$  selbst.

Jedes Element von  $\tau$  ist abgeschlossen, daher gilt  $\text{ind}(M) = 0$ .

# Kleine induktive Dimension

Beispiel: Sei  $M = \mathbb{R}$ .

Als Topologie können wir wieder die Standardtopologie der offenen Intervalle wählen.

Der Rand jeder offenen Menge in diesem Sinne ist eine Menge isolierter Punkte. Diese ist (nach unserem vorherigen Beispiel) 0-dimensional.

Abgeschlossen sind hier nur  $\emptyset$  und  $\mathbb{R}$ , daher ist  $\text{ind}(M) = 1$ .

# Kleine induktive Dimension

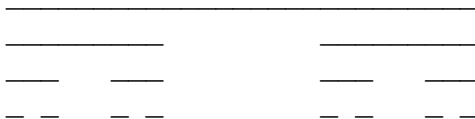
Beispiel: Sei  $M = \mathbb{Q}$ .

Eine Basis für eine Topologie für  $\mathbb{Q}$  ist  $\mathbb{Q}$  selbst, die Topologie ist dann  $\mathfrak{P}(\mathbb{Q})$ .

Jedes Element der Basis ist dann abgeschlossen, daher gilt  $\text{ind}(\mathbb{Q}) = 0$ .

# Cantorsches Diskontinuum

Wir erinnern uns an die Konstruktion:





# Cantorsches Diskontinuum

Formal:

- Anfangsmenge:  $C_0 := I_{0,1} := [0, 1]$
- Induktionsvoraussetzung: Seien  $I_{k,1}, \dots, I_{k,2^k}$  konstruiert.
- Induktionsschritt: Für  $I_{k,j} = [a, b]$  setze

$$I_{k+1,2j-1} := [a, a + (b - a)/3]$$

$$I_{k+1,2j} := [a + 2(b - a)/3, b]$$

- $C_k := \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{k,j}$

$C := \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$  heißt dann **Cantorsches Diskontinuum**

(Cantor-Menge, Cantor-Staub, Schwamm-Menge, Cantorsche Wischmenge).

# Cantorsches Diskontinuum

Welche kleine induktive Dimension hat die Cantor-Menge?

Die Mengen  $M_{k,j} := C \cap I_{k,j}$  (die kleinen Intervalle aus der Konstruktion von  $C$ ) ergeben eine Basis der Topologie von  $C$ . Diese Mengen sind in der Topologie von  $C$  abgeschlossen, daher ist  $C$  0-dimensional.

## Kleine induktive Dimension

### Satz

Seien  $M_1, M_2$  metrische Räume,  $f : M_1 \rightarrow M_2$  ein Homöomorphismus (bijektiv, stetig, invers stetig). Dann gilt  $\text{ind}(M_1) = \text{ind}(M_2)$ .

Die kleine induktive Dimension ist also eine topologische Invariante, also eine topologische Dimension, wie wir sie uns vorstellen.

Zum Vergleich: Die Kapazitätsdimension ist *keine* topologische Invariante. Die Cantor-Menge kann stetig auf eine Menge abgebildet werden, die z.B. auf der Teilung  $(1/4, 1/2, 1/4)$  basiert, statt  $(1/3, 1/3, 1/3)$ . Diese hätte die Kapazitätsdimension  $1/2$ , statt  $\log_3 2$ .

# Kleine induktive Dimension

Die kleine induktive Dimension beachtet die Mengeninklusion:

## Satz

Sei  $M$  ein metrischer Raum,  $S \subseteq T \subseteq M$ .

Dann gilt:

$$\text{ind}(S) \leq \text{ind}(T)$$

# Kleine induktive Dimension

Beispiel: Dimension des  $\mathbb{R}^3$

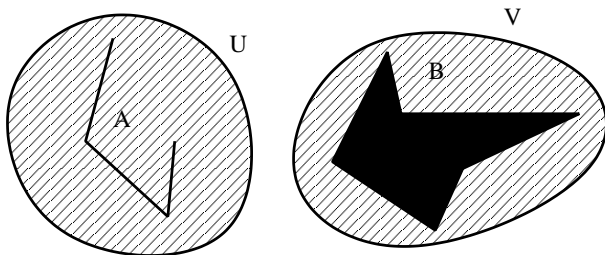
- 1 Basis des  $\mathbb{R}^3$ : Die „Würfel“, also die 3D-Intervalle  $[a, b] \times [c, d] \times [d, e]$ .
- 2 Die Ränder hiervon sind die „Würfeloberflächen“. Wir erhalten eine Basis einer solchen Fläche durch die induzierte Topologie der „Würfel“ darauf.
- 3 Diese sind offenbar homöomorph zu den 2D-Intervallen  $[a, b] \times [c, d]$ . Ihre Ränder sind verallgemeinerte Rechtecke auf den Würfeloberflächen.
- 4 Wieder können wir die relative Topologie verwenden. Wir erhalten intervallartige Abschnitte der verallgemeinerten Rechtecke.
- 5 Die Ränder sind einzelne Punkte auf den Würfeln. Nach der bekannten Argumentation sind diese 0-dimensional.
- 6 Im Rückschluss ist der  $\mathbb{R}^3$  damit 3-dimensional.

# Trennung von Mengen

## Satz

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $A, B \subset M$  beliebige disjunkte Mengen.

Dann gibt es offene Mengen  $U \supseteq A$  und  $V \supseteq B$ , die ebenfalls disjunkt sind.



# Trennung von Mengen

- Dieser Satz gilt allgemein in metrischen Räumen.
- Da  $U$  und  $V$  offen sind, existiert „zwischen“ ihnen noch eine weitere Menge, dies motiviert die folgende Definition:

## Definition

Seien  $A, B$  disjunkte Mengen in einem metrischen Raum  $M$ .  
Eine Menge  $L$  **trennt**  $A$  und  $B$ , falls

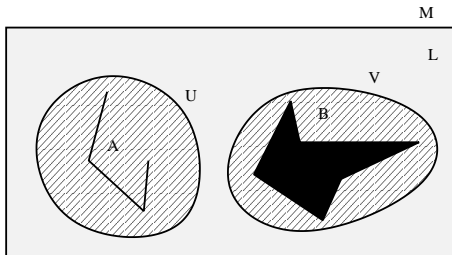
- Es gibt offene, disjunkte Mengen  $U \supseteq A$  und  $V \supseteq B$ ,
- $L = M \setminus (U \cup V)$

# Trennung von Mengen

## Definition

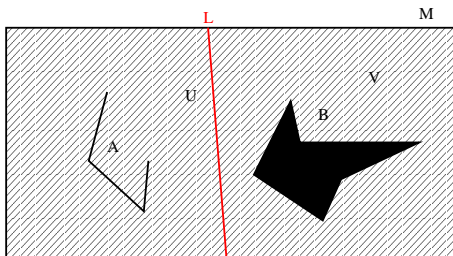
Seien  $A, B$  disjunkte Mengen in einem metrischen Raum  $M$ .  
Eine Menge  $L$  **trennt**  $A$  und  $B$ , falls

- Es gibt offene, disjunkte Mengen  $U \supseteq A$  und  $V \supseteq B$ ,
- $L = M \setminus (U \cup V)$





- In unserem Beispiel haben wir die euklidische Ebene (2-dimensional) durch ein 2-dim.  $L$  getrennt.
- Allgemein reicht aber eine 1-dimensionale Linie oder Kurve:



# Große induktive Dimension

## Definition

Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum.

$$IND(M) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad M = \emptyset$$

$$IND(M) \leq k \quad \Leftrightarrow \quad \text{Je zwei abgeschlossene, disjunkte Mengen werden durch eine Menge } L \text{ mit } IND(L) \leq k - 1 \text{ getrennt.}$$

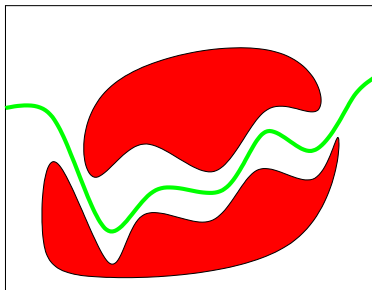
Wie üblich gilt:

## Definition

$$IND(M) = k \text{ gdw. } IND(M) \leq k \text{ und nicht } IND(M) \leq k - 1.$$

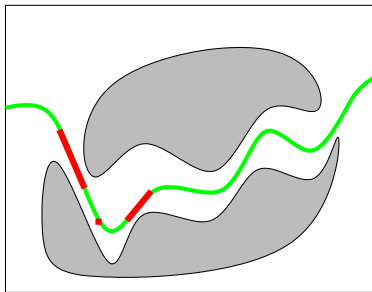
# Dimension des Rechtecks

Beispiel: Ein Rechteck ist zweidimensional, da je zwei offene Mengen von einer Kurve getrennt werden können:



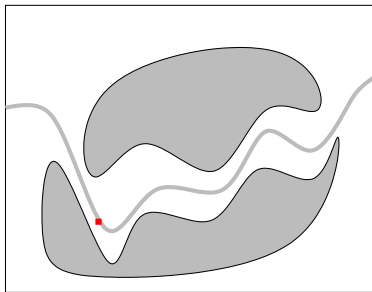
# Dimension des Rechtecks

Beispiel: Eine Kurve ist eindimensional, weil je zwei offene Intervalle auf ihr (relative Topologie!) durch einen Punkt getrennt werden.



# Dimension des Rechtecks

Beispiel: Ein Punkt ist nulldimensional, weil alle Schnitte der möglichen offenen Teilmengen (der Punkt selbst oder die leere Menge) leer sind, daher nur durch  $\emptyset$  „getrennt“ werden.



# Separable metrische Räume

## Definition

Ein metrischer Raum heißt **separabel**, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge von ihm gibt.

Beispiel:  $\mathbb{R}$  ist separabel, da  $\mathbb{Q}$  dicht in  $\mathbb{R}$  und abzählbar ist.

Analog ist  $\mathbb{R}^n$  separabel, da  $\mathbb{Q}^n$  dicht in  $\mathbb{R}^n$  und abzählbar ist.

# Trennung in separablen metrischen Räumen

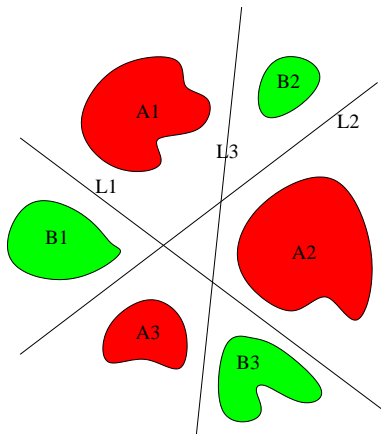
## Satz

Sei  $M$  ein separabler metrischer Raum mit  $IND(M) \leq n - 1$ ,  
 $A_1, B_1, \dots, A_n, B_n$   $n$  Paare von abgeschlossenen Mengen mit  
 $A_i \cap B_i = \emptyset$ .

Dann gibt es  $L_1, \dots, L_n$ , die jeweils  $A_i$  von  $B_i$  trennen und  
 $\bigcap_i L_i = \emptyset$ .

# Trennung in separablen metrischen Räumen

Beispiel im  $\mathbb{R}^2$ : Der Schnitt dreier Geraden (in allgemeiner Lage) ist meist leer.





# Lösungen von nichtlinearen Gleichungssystemen

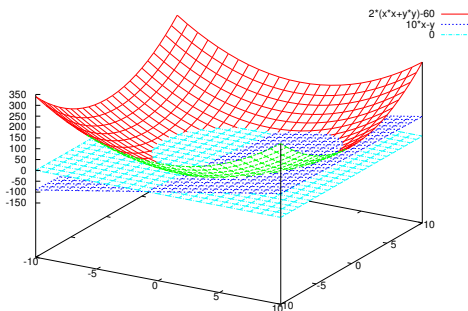
- Sei  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion.
- Für jedes  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  lassen sich die Lösungen  $f(x_0) = y_0$  untersuchen.
- Bekannte Lösungsverfahren existieren für lineare Funktionen  $f$ , die Lösungen sind dann affine Räume.
- Im nichtlinearen Fall gibt es nur wenige Ansätze:
  - Fixpunktsätze von Banach, Brouwer und Schauder,
  - Abbildungsgrad (Kronecker-Integral, Erweiterung von Picard).

# Gleichungssystem mit zwei Variablen

Beispiel: Das Gleichungssystem

$$2(x^2 + y^2) - 60 = 0$$

$$10x - y = 0$$



# Gleichungssystem mit zwei Variablen

Beispiel: Das Gleichungssystem

$$2(x^2 + y^2) - 60 = 0$$

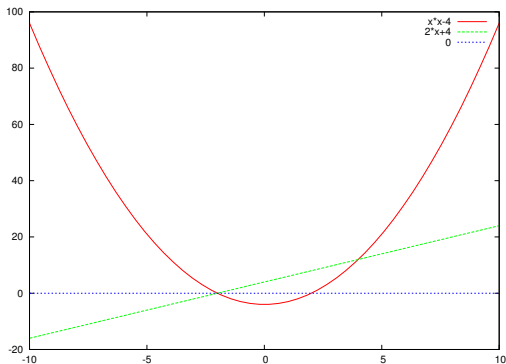
$$10x - y = 0$$

- Verschiebt man eine der Gleichungen um einen Wert  $\varepsilon$ , so bleibt das System lösbar:
- Die neue Lösung hat „genug Platz“ um auszuweichen.

# Gleichungssystem mit einer Variablen

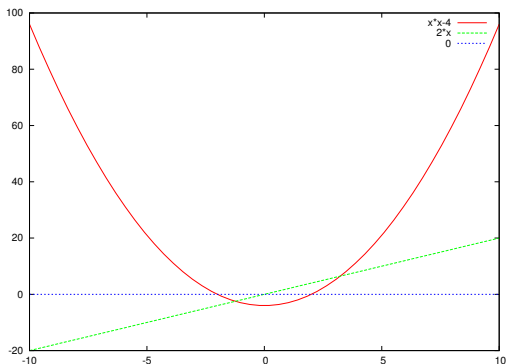
$$x^2 - 4 = 0$$

$$2x + 4 = 0$$



# Gleichungssystem mit einer Variablen

Hier ist die Lösung durch eine Gleichung bereits festgelegt.  
Sie kann bei einer Störung nicht „ausweichen“.



# Störfunktion

## Definition

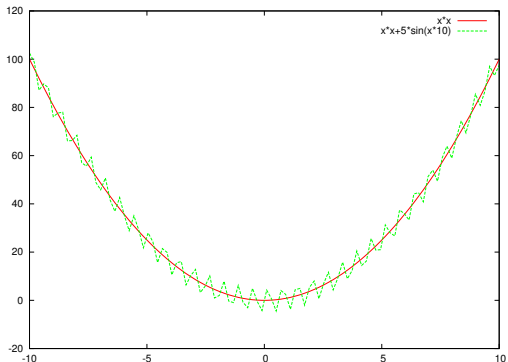
Seien  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetige Funktionen.  
 $g$  heißt  $\varepsilon$ -**Störung** von  $f$ , falls

$$|f - g|_{\infty} \leq \varepsilon$$

gilt, d.h. es gibt eine **Störfunktion**  $E : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $g = f + E$   
und

$$|E|_{\infty} \leq \varepsilon$$

# $\varepsilon$ -Störung



Die Funktion  $f(x) = x^2$  und eine  $\varepsilon$ -Störung

# Essentiell lösbar

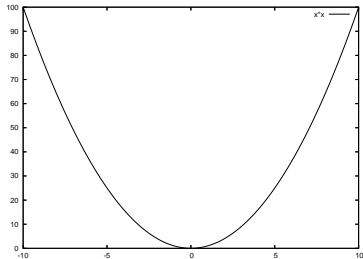
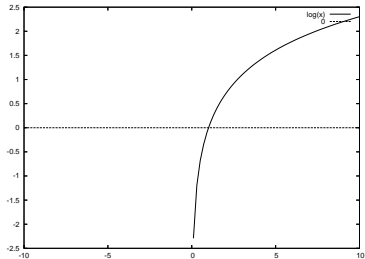
## Definition

Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion mit eine Lösung für  $f(x) = 0$ .

$f$  heißt **essentiell lösbar**, falls es ein  $\varepsilon$  gibt, so dass jede  $\varepsilon$ -Störung  $g$  von  $f$  auch eine Lösung  $g(x) = 0$  besitzt.



# Essentiell lösbar



Essentiell lösbar und nicht essentiell lösbar

# Gleichungsdimension

## Definition

Die **Gleichungsdimension**  $eqn(M)$  eines metrischen Raums  $M$  ist die größte Zahl  $n$  für die gilt:

Es gibt  $n$  stetige Funktionen  $f_1, \dots, f_n$ , so dass  $(f_1, \dots, f_n) = 0$  essentiell lösbar ist.

Diskrete Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  sind damit 0-dimensional, da auf einer diskreten Menge jede Abbildung unstetig ist.

# Dimension separabler metrischer Räume

## Satz

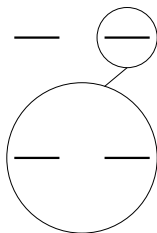
Für einen separablen metrischen Raum  $M$  gilt:

$$\mathit{ind}(M) = \mathit{IND}(M) = \mathit{eqn}(M)$$

# Selbstähnlichkeit

**Strukturelle Selbstähnlichkeit:** Ein kleiner Teilausschnitt der Form hat jeweils große Ähnlichkeit mit größeren Ausschnitten der Form.

Beispiel: **Cantor-Menge** Jeder Teil von  $C$  ist eine um  $1/3$  verkleinerte Kopie von  $C$ .



# Selbstähnlichkeit

Kann man diese Selbstähnlichkeit zur Definition einer Dimension verwenden?

## Definition

Seien  $M_1, M_2$  metrische Räume.

$f : M_1 \rightarrow M_2$  heißt **Ähnlichkeit**, falls es ein  $r > 0$  gibt, so dass

$$d_2(f(x), f(y)) = r \cdot d_1(x, y)$$

für alle  $x, y \in M_1$ .

Offenbar ist eine Ähnlichkeit so etwas wie eine Isometrie, verbunden mit einer (inneren) Skalierung.

# Dilatation

Beispiel einer Ähnlichkeit im  $\mathbb{R}$ :

## Satz

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Ähnlichkeit, gdw. es ein  $r > 0$  gibt, so dass

$$f(x) = f(0) \pm rx$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Desweiteren gibt es ein  $a \in \mathbb{R}$ , so dass

$$f(0) = (1 \mp r)a$$

$f$  heißt **Dilatation**. Ist  $r \neq 1$ , so ist  $a$  offenbar ein Fixpunkt.

# Dilatation

Beispiel einer Ähnlichkeit im  $\mathbb{R}^2$ :

## Satz

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist eine Ähnlichkeit, gdw. es ein  $r > 0$  gibt, so dass

$$\|f(x) - f(y)\| = r\|x - y\|$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}^2$ . Es werden also alle Abstände genau um  $r$  skaliert.

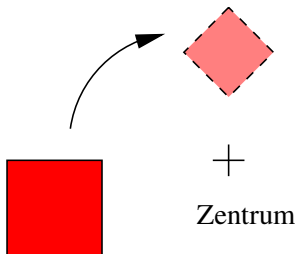
Genau dann wenn:

$$f(x) = rLI(x) + f(0)$$

# Dilatation

$LI : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist dabei eine *lineare Isometrie*, also eine Kombination aus Drehung und Spiegelung.

Ist  $r \neq 1$ , so hat  $f$  in jedem Fall einen Fixpunkt, das Drehzentrum.





# Lineare Isometrie

## Satz

Jede lineare Isometrie im  $\mathbb{R}^2$  lässt sich als Produkt folgender Matrizen schreiben:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ Drehung um } \alpha$$

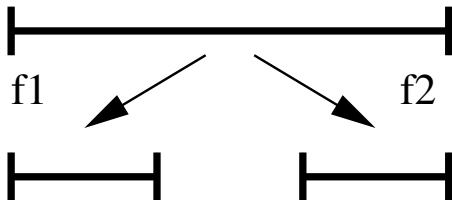
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ Spiegelung an } y\text{-Achse}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Spiegelung an } x\text{-Achse}$$

# Cantor-Menge

Wir können nun die Cantor-Menge durch eine Menge von Ähnlichkeiten darstellen:

$$f_1(x) = \frac{x}{3} \quad f_2(x) = \frac{x+2}{3}$$



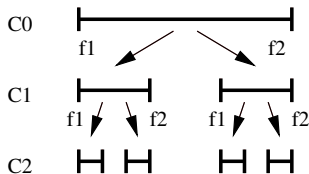
# Cantor-Menge

Wir erhalten eine Folge von Mengen durch *iterierte Anwendung* des Funktionensystems, ein sog. **iteriertes Funktionensystem**:

$$C_1 = f_1[C_0] \cup f_2[C_0] := f[C_0]$$

$$C_2 = f_1[C_1] \cup f_2[C_1] := f[C_1]$$

⋮



# Iterierte Funktionensysteme

- Die Menge  $(f_1, f_2)$  ist ein iteriertes Funktionensystem.
- $C := \lim_{i \rightarrow \infty} C_i$ , das heißt  $C = f_1[C] \cup f_2[C]$
- $C$  ist also eine unter  $f = (f_1, f_2)$  *invariante Menge*. Man nennt sie auch **Attraktor** von  $f$ .

# Iterierte Funktionensysteme

## Definition

Sei  $M$  ein metrischer Raum. Es seien  $f_1, f_2, \dots, f_n : M \rightarrow M$  Ähnlichkeiten,  $C_0 \subseteq M$ . Dann heißt  $f := (f_1, \dots, f_n; C_0)$  (zuweilen einfach  $f := (f_1, \dots, f_n)$  wenn  $C_0$  klar ist) **iteriertes Funktionensystem**.

Die Menge

$$C := \lim_{i \rightarrow \infty} \bigcup_{j=0}^n f_j(C_i) = \bigcap_{i \rightarrow \infty} \bigcup_{j=0}^n f_j(C_i)$$

(falls sie existiert) heißt **Attraktor** von  $f$ .

# OSC-Bedingung von Moran

Eine sinnvolle Forderung, um ein Fraktal als Attraktor zu erhalten, ist, dass

- 1 der Attraktor in einem beschränkten Gebiet Platz findet,
- 2 er sich selbst nicht „überschneidet“.

## Definition

Ein iteriertes Funktionensystem  $f = (f_1, \dots, f_n; C_0)$  erfüllt die **OSC-Bedingung von Moran**, falls

- 1 es eine offene Menge  $U$  gibt mit  $f_i(U) \subset U$  für alle  $i$ ,
- 2  $f_i(U) \cap f_j(U) = \emptyset$  für alle  $i, j$ .

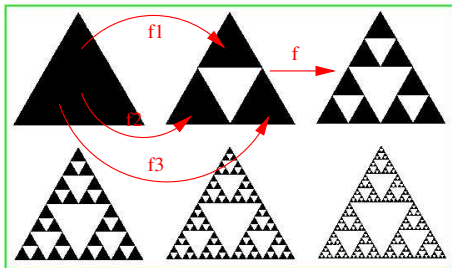
# OSC-Bedingung von Moran

Die Cantor-Menge erfüllt die OSC-Bedingung:

- 1 Für  $U = (0, 1)$  gilt:  $f_1(U) = (0, 1/3) \subset U$  und  $f_2(U) = (2/3, 1) \subset U$ ,
- 2  $f_1(U) \cap f_2(U) = (0, 1/3) \cap (2/3, 1) = \emptyset$

# Sierpinski-Dreieck

Das Sierpinski-Dreieck entsteht durch ein iteriertes Funktionensystem  $(f_1, f_2, f_3)$





# Sierpinski-Dreieck

Bestimmung von  $f_1, f_2, f_3$ :

- 1 Jede Ähnlichkeit  $f_i$  ist darstellbar als lineare Isometrie  $f_i = rLI(x, y) + f_i(0, 0)$ .
- 2 Der „äußere“ Punkt  $(x_i, y_i)$  des betreffenden Dreiecks ist der Fixpunkt, d.h.  $f_i(x_i, y_i) = (x_i, y_i)$ .
- 3 Die Seitenlängen werden halbiert.

Aus diesen Bedingungen lässt sich  $f_i$  bestimmen.

# Kapazitätsdimension des Sierpinski-Dreiecks

- Überdeckung durch Dreiecke,
- Halbierung des Durchmessers in jedem Iterationsschritt,
- dreifache Anzahl in jedem Schritt.

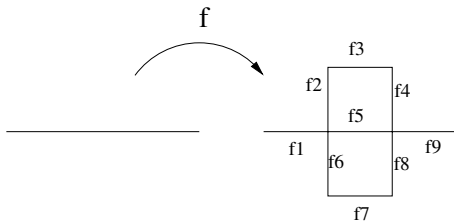
Wir erhalten:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}, \quad N_{\varepsilon_n} = 3^n$$
$$\Rightarrow d_C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3^n}{\log 2^n} = \log_2 3$$

Dies ist der Kehrwert von  $d_C = \log_3 2$  für die Cantor-Menge.

# Peano-Kurve als IF

Die Peano-Kurve: Konstruktion durch IF  $f = (f_1, \dots, f_9)$



# Ähnlichkeitsdimension

Wir haben festgestellt, dass jede Ähnlichkeit im Wesentlichen durch eine **Ähnlichkeitsfaktor**  $r$  bestimmt wird.

Für ein IF  $f = (f_1, \dots, f_n)$  gibt es somit eine Liste von Ähnlichkeitsfaktoren  $RL_f := (r_1, \dots, r_n)$ .

## Definition

Gilt  $r_i < 1$  für alle  $i$ , so heißt  $RL_f$  **kontrahierend** (auch **hyperbolisch**).

# Ähnlichkeitsdimension

## Definition

Die Zahl  $d_s(f) = s$  sei so bestimmt, dass

$$\sum_{i=1}^n r_i^s = 1$$

Dann heißt  $d_s(f)$  **Ähnlichkeitsdimension** von  $f$ .  
 $d_s(f)$  ist eindeutig bestimmt.

# Ähnlichkeitsdimension

## Satz

$d_s(f) = 0$  genau dann wenn  $n = 1$ .

## Beweis.

Sei  $s = 0$ . Dann gilt:

$$r_i^s = 1 \text{ für alle } i \quad \sum_{i=1}^n r_i^s = 1 \quad \Rightarrow \quad n = 1$$

Sei umgekehrt  $n = 1$ :

$$\sum_{i=1}^n r_i^s = r_1^s = 1 \quad \Rightarrow \quad s = 0$$

# Ähnlichkeitsdimension

Formaler Beweis der Existenz und Eindeutigkeit: Setze

$$f(s) := \sum_{i=1}^n r_i^s.$$

Dann gilt:

$$f'(s) = \sum_{i=1}^n \ln(r_i) r_i^s < 0$$

$f$  ist also streng monoton fallend. Es gilt  $f(0) = n$  und  $f(s) \rightarrow 0$  für  $s \rightarrow \infty$ . Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein  $s \in [0, \infty)$  mit  $f(s) = 1$ .

# Ähnlichkeitsdimension

## Satz

Ist  $n = 1$ , so besteht der Attraktor aus einem Punkt.

## Beweis.

Einen Punkt muss der Attraktor mindestens haben: Den Fixpunkt der Ähnlichkeit  $f_1$ . Ist nun  $r_1 < 1$ , so geht der Durchschnitt aller Mengen aber gegen 0, d.h. jeder andere Punkt kann nicht im Schnitt sein, da jede  $\varepsilon$ -Umgebung zum Fixpunkt unterschritten wird. □



# Ähnlichkeitsdimension der Peano-Kurve

- Die Peano-Kurve wird über ein IF  $f = (f_1, \dots, f_9)$  gebildet.
- Es gilt  $RL = (r_1, \dots, r_9) = (1/3, \dots, 1/3)$
- Es folgt:  $\sum_{i=1}^9 (1/3)^s = 1 \Rightarrow (1/3)^s = 1/9 \Rightarrow s = 2$

# Ähnlichkeitsdimension der Koch-Kurve

- Die Koch-Kurve wird über ein IF  $f = (f_1, \dots, f_4)$  gebildet.
- Es gilt  $RL = (r_1, \dots, r_4) = (1/3, \dots, 1/3)$
- Es folgt:

$$\sum_{i=1}^4 (1/3)^s = 1 \quad \Rightarrow \quad (1/3)^s = 1/4 \quad \Rightarrow \quad s = \log_3 4$$

**Die Ähnlichkeitsdimension stimmt also für wichtige Beispiele mit der Kapazitätsdimension überein.**

# Hausdorff-Metrik

## Definition

Sei  $M$  ein metrischer Raum,  $H$  die Menge aller nichtleeren, abgeschlossenen Teilmengen von  $M$ . Dann sei

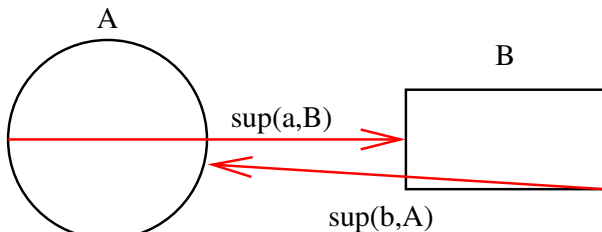
$$D(A, B) := \max\left\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\right\}$$

die **Hausdorff-Metrik** auf  $H$ .

## Satz

$(H, D)$  ist ein metrischer Raum. (*Beweis zur Übung.*)

# Hausdorff-Metrik



Hausdorff-Metrik zweier Mengen als Maximum der supremalen Punktabstände

# Zentraler Attraktorsatz

## Satz

Sei  $M$  ein metrischer Raum,  $f$  ein IF mit kontrahierender RL.

Dann gibt es genau einen nichtleeren kompakten Attraktor zu  $f$ .

# Zentraler Attraktorsatz

## Beweis.

Der Raum  $\mathcal{K}$  der kompakten Teilmengen von  $M$  ist bezüglich der Metrik  $D$  vollständig, das heißt insbesondere, dass Cauchy-Folgen konvergieren. Wir setzen

$$f(A) := \bigcup_{i=1}^n f_i(A) \quad \text{und} \quad r = \max_{i=1}^n r_i$$

Seien nun zwei Mengen  $A, B \in \mathcal{K}$  derart, dass  $D(A, B) < q$ . Dann kann man zeigen, dass

$$D(f(A), f(B)) \leq rD(A, B)$$

Für die Folge  $C_0, C_1, C_2 \dots \rightarrow C$  ergibt sich nun eine Cauchy-Folge, die gegen den Attraktor  $C$  konvergiert. Diese Grenzmenge ist eindeutig. □

# Grenzwerte

Wir hatten bisher für Mengen mit der Definition

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = \bigcap_{i \rightarrow \infty} A_i$$

gearbeitet. Dies hat den Nachteil, dass eigentlich  $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_i \supseteq \dots$  gelten muss, damit die Grenzmenge nicht leer ist. (Bei der bisherigen Konstruktion der Cantor-Menge galt das.)

Durch die Hausdorff-Metrik können wir nun den Grenzwert neu definieren:

$$A := \lim_{i \rightarrow \infty} A_i \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} \forall i \geq n : D(A, A_i) < \varepsilon$$

Vorteil: Die Mengen müssen keine Kette mehr bilden.

# Startmengen

## Satz

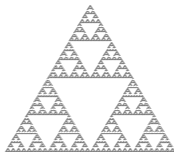
Bei der neuen Definition des Grenzwertes für Mengen ist die Startmenge eines IF beliebig, solange sie kompakt ist!

## Beweis.

ergibt sich aus dem Beweis des zentralen Attraktorsatzes mittels des Banachschen Fixpunktsatzes. □



# Startmengen



Die Iterationen 1, 2, 4 und 8 eines IFS.

# Attraktoren

Beispiel: Sei  $b \in \mathbb{C}$  mit  $|b| > 1$ ,  $D = \{d_1, \dots, d_k\}$ ,  $0 \in D$ .

$$F := \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b^{-j}, a_j \in D \right\}$$

$$W := \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b^j, a_j \in D \right\}$$

$$F + W := \{ z \in \mathbb{C} : z = v + u, u \in W, v \in F \}$$

# Attraktoren

## Satz

Sei  $f_l : F + W \rightarrow F + W$  mit

$$f_l(v + u) = u + d_l b^{-1} + b^{-1}v$$

ist für alle  $l \in \{1, \dots, k\}$  eine kontrahierende Ähnlichkeitsabbildung.

Mit dem zentralen Attraktorsatz gilt: Der Attraktor von  $(f_1, \dots, f_k)$  ist gerade  $F$ .

# Kondensations-Transformation

## Definition

Sei  $M$  ein metrischer Raum und  $C \subset M$  eine kompakte Menge.  
Sei  $f_0 : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  derart, dass jeder kompakten Menge  $B$  der Wert  $f_0(B) = C$  zugewiesen wird.  
Dann heißt  $f_0$  **Kondensation**.

## Satz

Sei  $(f_0, \dots, f_n)$  ein kontrahierendes IF mit Kondensation  $f_0$ .  
Dann gilt für die Abbildung  $B \mapsto \bigcup_{k=0}^n f_k(B)$  der Banachsche Fixpunktsatz, es gibt also einen eindeutigen Attraktor.

# Collage-Satz

## Satz

Sei  $(M, D)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $(f_1, \dots, f_n)$  ein IF, bzw.  $(f_0, \dots, f_n)$  ein IF mit Kondensation.

Sei  $r = \max r_i < 1$  und  $A$  der Attraktor von  $f$ .

Dann gilt

$$D(T, A) \leq \frac{1}{1-r} D\left(T, \bigcup_k f_k(T)\right)$$

für alle  $T \subset \mathcal{K}$ .

# Collage-Satz

## Beweis.

$$\begin{aligned}D(T, A) &= D\left(T, \lim_{k \rightarrow \infty} f^{\circ k}(T)\right) \\&= \lim_{k \rightarrow \infty} D\left(T, f^{\circ k}(T)\right) \\&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^k D(f^{\circ m-1}(T), f^{\circ m}(T)) \\&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} D(T, f(T))(1 + r + r^2 + \dots + r^{k-1}) \\&\leq \frac{1}{1-r} D(T, f(T))\end{aligned}$$

# Lokale iterierte Funktionensysteme

## Definition

Sei  $R \subset M$  eine nichtleere Teilmenge eines kompakten metrischen Raums  $M$ . Sei  $f : R \rightarrow M$  eine Kontraktion mit  $r < 1$ . Dann heißt  $f$  eine **lokale Kontraktion**.

Sei  $f := (f_1 : R_1 \rightarrow M, \dots, f_n : R_n \rightarrow M)$  mit lokale Kontraktionen  $f_i$ . Dann heißt  $f$  **lokales IF**.  $r := \max r_i$  heißt **Kontraktionsfaktor** des LIF.

# Attraktoren lokaler IF

## Satz

Sei

$$W_{\text{lokal}} : \begin{cases} \mathfrak{P}(M) \rightarrow \mathfrak{P}(M) \\ B \mapsto \bigcup_{i=1}^n f_i(B \cap R_i) \end{cases}$$

Besitzt  $W_{\text{lokal}}$  einen Attraktor, so gibt es einen **maximalen Attraktor**, der alle Attraktoren enthält.

Beweisidee: Sind  $A_1$  und  $A_2$  Attraktoren, so ist  $A_3 := A_1 \cup A_2$  natürlich auch ein Attraktor.

Mit dem Zornschen Lemma gibt es dann ein Maximum, also die Vereinigung aller Attraktoren.



# Collage-Satz für LIF

## Satz

Sei eine Folge  $(A_0, A_1, \dots)$  definiert durch  $A_0 := M$ ,

$$A_{n+1} := \bigcup_{i=1}^n f_i(B \cap R_i).$$

- Die Kette  $A_0 \supset A_1 \supset \dots$  ist monoton.
- $A := \lim_{i \rightarrow \infty} A_i = \bigcap_{i \rightarrow \infty} A_i$  ist der maximale Attraktor von  $W_{\text{lokal}}$ .
- Gibt es ein kompaktes  $B \neq \emptyset$  mit  $B \subset W_{\text{lokal}}(B)$ , dann ist  $A \neq \emptyset$ .

# Diedergruppe des Quadrats

Um einen fraktalen Kompressionsalgorithmus anzugeben, benötigen wir zuerst die **Diedergruppe**:

- 1  $S_0$  Identität
- 2  $S_1$  Spiegelung an der  $x$ -Achse
- 3  $S_2$  Spiegelung an der  $y$ -Achse
- 4  $S_3 = S_1 \circ S_2$  Drehung um  $180^\circ$
- 5  $S_4$  Spiegelung an der Geraden  $y = x$
- 6  $S_5 = S_1 \circ S_4$  Drehung um  $90^\circ$
- 7  $S_6 = S_2 \circ S_4$  Drehung um  $-90^\circ$
- 8  $S_7 = S_1 \circ S_2 \circ S_4$  Spiegelung an  $y = -x$

# Diedergruppe des Quadrats

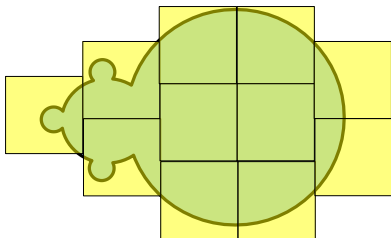
- Die Diedergruppe des Quadrats ist eine **Gruppe**, also eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung  $\circ$ .
- Sie stellt die Menge aller Isometrien des planaren Quadrats dar.
- Daraus lassen sich Ähnlichkeiten des Quadrats konstruieren:  $f_k(\vec{x}) = S_k(\vec{x}) + \vec{t}$  für einen Translationsvektor  $\vec{t}$ .

# Schwarz-Weiß-Transformation

Idee der Schwarz-Weiß-Transformation: Finde ein IF, das ausgehend von einem „Urblock“ ein Schwarz-Weiß-Bild erstellt.

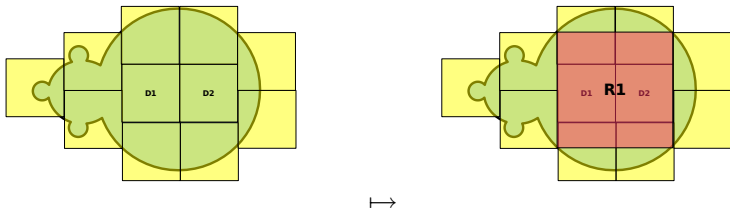
# Schwarz-Weiß-Transformation

0. Sei eine Bitmap  $G \subseteq \{(x, y) : x_u \leq x \leq x_o, y_u \leq y \leq y_o\}$  gegeben.
1. Überdecke  $G$  durch eine Menge von quadratischen Urblöcken  $\{D_i\}$  fester Größe *nicht überlappend*.



# Schwarz-Weiß-Transformation

2. Finde zu jedem Quadrat  $D_i$  ein doppelt so großes Quadrat  $R_i$  mit  $\bar{D}_i = 2S_k(D_i) + \vec{t}$  und  $D(\bar{D}_i, R_i)$  wird minimal. Beachte, dass die Zahl möglicher Kandidaten-Tripel  $(R_i, S_k, \vec{t})$  endlich - wenn auch sehr groß - ist.



# Schwarz-Weiß-Transformation

3. Gib die Parameter des gefundenen IF als Code aus, z.B. in Zeilen der Form  $(\vec{d}, \vec{t}, k)$ , wobei  $\vec{d}$  die linke untere Ecke von  $D_i$  darstellt.

$((6, 3), (0, 2), 0), ((8, 3), (0, 2), 0), \dots)$

4. Komprimiere den entstehenden Code verlustfrei.

# Schwarz-Weiß-Transformation

- Das über die S-W-Transformation gefundene IF kann nun - ausgehend von z.B. einem vollständig gefüllten Bild - ein Fraktal erzeugen, das dem Ausgangsbild sehr ähnlich sieht.
- Die verbleibende Differenz kann im Idealfall leichter komprimiert werden.
- Der Algorithmus ist sehr aufwändig: Globale Suche nach der Transformation, Abstandsbestimmung über den Hausdorffabstand
- Verbesserungen: Einschränken der Suche auf ein Gitter (Verschlechterung der Kompression), Verwendung anderer Abstände, z.B. mittlerer quadratischer Abstand



# Verlustfreie Kompression

- Verlustfreie Kompression wird oft mittels Huffman-Codierung (oder davon abgeleiteter Verfahren) realisiert
- Huffman-Codes sind Entropie-optimal (für gedächtnislose Quellen), d.h. die mittlere Codewortlänge liegt nahe dem theoretischen Optimum (siehe Vorlesung *Datenstrukturen und Algorithmen* oder *Informationstheorie*)
- Andere Möglichkeit: Arithmetische Kompression

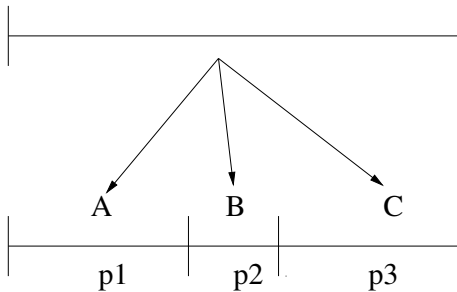
# Arithmetische Kompression

**Prinzip:** Wähle ein IF, das den Einzelwahrscheinlichkeiten  $p_1, \dots, p_n$  der Symbole  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  entspricht:

$$f_i(x) = p_i x + \sum_{i=1}^{i-1} p_i$$

Der Attraktor ist in diesem Fall das gesamte Intervall  $[0, 1]$ .

# Arithmetische Kompression



# Arithmetische Kompression

Eine beliebig lange Zeichenkette  $\tau_1\tau_2 \dots \tau_l$  ist nun durch *einen* Punkt  $x_l$  definiert, der sich durch eine Iteration

$$x_0 = 0$$

$$x_{k+1} = f_{\tau_{k+1}}(x_k)$$

ergibt.

# Arithmetische Kompression

Dekompression:

- 1 Bestimme, in welchem Intervall der Punkt  $x_l$  liegt. Dies entspricht dem ersten Zeichen.
- 2 Verfahre so rekursiv, bis der Punkt  $x_l$  genau getroffen wird.

## Bits pro Punkt $x_k$

$\tau$  enthalte genau  $h_i$ -mal den Buchstaben  $i$ . Dann ist  $h_1 + \dots + h_n = k$  die Länge der Zeichenkette. Wenn nun  $x_0 \in [0, 1]$ , so gilt

$$x_k \in I_k := [x_k(0), x_k(1)) = \left[ x_k(0), x_k(0) + \prod_{i=1}^n p_i^{h_i} \right)$$

$x_k(0)$  ist durch die Wahrscheinlichkeiten und  $k$  bereits vorher definiert, wichtig ist also nur der Term  $\prod_{i=1}^n p_i^{h_i}$ . Dieser kann mit

$$-\log_2 \prod_{i=1}^n p_i^{h_i}$$

binären Stellen dargestellt werden.

# Kompressionsrate

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{Stellen der Ausgabe}}{\text{Stellen der Eingabe}} &= \frac{-\log_2 \prod_{i=1}^n p_i^{h_i}}{c \cdot \sum_{i=1}^n h_i} = \frac{-\sum_{i=1}^n h_i \log_2 p_i}{c \cdot \sum_{i=1}^n h_i} \\
 &= -\sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{h_i}{c \cdot \sum_{i=1}^n h_i}}_{\text{relative Häufigkeit von } i} \log_2 p_i \\
 &\approx -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \quad (\text{Quellen-Entropie})
 \end{aligned}$$

# Arithmetische Kompression

- Genau wie die Huffman-Kompression komprimiert die AK also verlustfrei
- und Entropie-optimal.
- Anders als bei der HK werden bei der AK auch manche unendlichen Zeichenketten zu einer endlichen Codesequenz komprimiert, z.B. wenn die Folge  $x_i$  gegen eine rationale Zahl  $x_k$  konvergiert.



# Segmentierung

Häufige Anwendung in der Bildverarbeitung: Segmentierung

**Beispiel:** Trenne ein Objekt von seinem Hintergrund.  
Das ist einfach, falls Objekt, Hintergrund oder beide eine „flache“ Textur haben:



Das Objekt ist leicht automatisch vom einheitlich schwarzen Hintergrund zu trennen.

# Textursegmentierung

**Problem:** Wie ist zu verfahren, wenn die dargestellte Szene komplexer ist?



Die Personen im Bild sind für einen Computer schlecht vom Hintergrund zu trennen.

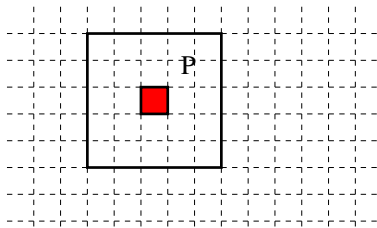
aus: *Andrew Ringler: Texture Segmentation by Local Fractal Dimension as Applied to Oceanic Search and Rescue*

# Textursegmentierung

**Lösungsansatz:** Die zu segmentierenden Objekte unterscheiden sich in ihrer *Fraktaldimension* vom Hintergrund.

Hierzu muss jedem Bildpunkt die Fraktaldimension seiner unmittelbaren Umgebung zugewiesen werden.

Vorgehen: Berechnung der Fraktaldimension in einem lokalen Fenster um den Punkt  $P$



# Textursegmentierung

Zu einem gegebenen Bild erhält man ein gleichgroßes *Texturbild*, aus dem sich evtl. leichter Objekte trennen lassen:

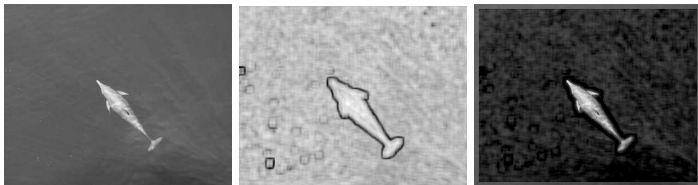


aus: Andrew Ringler: *Texture Segmentation by Local Fractal Dimension as Applied to Oceanic Search and Rescue*

# Textursegmentierung

Weitere Anwendung in der **Bildbearbeitung**: Betonung von Bilddetails.

Das Texturbild und das Original werden mittels Filteroperationen so kombiniert, dass das Objekt hervortritt:



aus: Andrew Ringler: *Texture Segmentation by Local Fractal Dimension as Applied to Oceanic Search and Rescue*

# Intervalle

## Definition

Seien  $I_1 = [a_1, b_1], \dots, I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$  beliebige Intervalle (offen, abgeschlossen, halboffen, beschränkt, unbeschränkt, einpunktig).

$$I := I_1 \times \dots \times I_n = \prod_{j=1}^n I_j \subset \mathbb{R}^n$$

heißt dann ein  **$n$ -dimensionales Intervall**. Sein **Inhalt** sei

$$|I| := \prod_{j=1}^n |b_j - a_j|$$

# Intervall-Überdeckung

## Definition

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Menge und  $\{I_k : k \in \mathbb{N}\}$  eine Menge von Intervallen mit

$$A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$$

Dann heißt  $\{I_k\}$  eine **Intervall-Überdeckung** von  $A$ .

# Äußeres Lebesgue-Maß

## Definition

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Menge.

$$\bar{\mathcal{L}} := \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} |I_k| : \{I_k\} \text{ ist Intervall-Überdeckung von } A \right\}$$

heißt **äußeres Lebesgue-Maß** von  $A$ .



# Eigenschaften des äußeren Lebesgue-Maßes

- In der Definition des ÄL kann man sich auf kompakte Intervall-Überdeckungen beschränken, da durch das Infimum nicht beschränkte Mengen keinen Beitrag leisten. Aus demselben Grund müssen einpunktige Intervalle nicht betrachtet werden.
- Das ÄL ist für alle Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  definiert.
- Es gilt  $0 \leq \overline{\mathcal{L}}(A) \leq \infty$ .
- Ist  $I$  ein Intervall, so gilt  $\overline{\mathcal{L}}(I) = |I|$ .
- Das ÄL ist invariant gegenüber euklidischen Bewegungen.
- Monotonie:  $A \subset B \Rightarrow \overline{\mathcal{L}}(A) \leq \overline{\mathcal{L}}(B)$

# Eigenschaften des äußeren Lebesgue-Maßes

- Subadditivität:

$$\bar{\mathcal{L}}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \bar{\mathcal{L}}(A_k)$$

- $\bar{\mathcal{L}}(A) = \inf\{\bar{\mathcal{L}}(U) : U \supset A, U \text{ offen}\}$
- Es gibt eine Menge  $H = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k$  mit  $H_k$  offen,  $H \supset A$  und  $\bar{\mathcal{L}}(H) = \bar{\mathcal{L}}(A)$ .

# Lebesgue-Maß

## Kriterium von Carathéodory

### Definition

Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Gilt für alle  $E \subset \mathbb{R}^n$

$$\overline{\mathcal{L}}(E) = \overline{\mathcal{L}}(A \cap E) + \overline{\mathcal{L}}(E \setminus A)$$

so heißt  $A$  **Lebesgue-messbar**.

$\mathcal{L}(A) := \overline{\mathcal{L}}(A)$  heißt dann **Lebesgue-Maß** von  $A$ .

# Messbare Mengen

- Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  heißt **Nullmenge**, wenn

$$\int_A 1 d\xi = 0$$

gilt. Nullmengen sind Lebesgue-messbar und ihr Maß ist Null.

- Jedes Intervall  $I$  ist messbar, es gilt  $\mathcal{L}(I) = |I|$ .
- Offene, abgeschlossene und abzählbare Schnitte und Vereinigungen davon sind messbar.
- Nicht messbare Mengen existieren, z.B. sogenannte *Vitali-Mengen*.

# Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

- Alle Eigenschaften des äußeren Lebesgue-Maßes gelten natürlich weiterhin.
- Alle *Borel-Mengen* sind messbar. (Die Borel-Mengen bilden die kleinste  $\sigma$ -Algebra der offenen und abgeschlossenen Mengen.)
- $\sigma$ -Additivität: Das Maß einer disjunkten Vereinigung von Mengen ist die Summe der Maße:  $\mathcal{L} \left( \sum_i A_i \right) = \sum_i \mathcal{L}(A_i)$

# Lebesgue-Maßes und Integrale

Es sei für eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  die **charakteristische Funktion**

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\mathcal{L}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) \, dx$$

falls  $\chi_A$  integrierbar ist.

# Hausdorff-Maße

## Definition

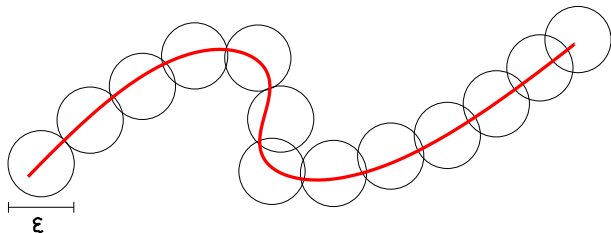
Es sei  $M$  ein separabler metrischer Raum und  $A \subset M$ ,  $s \geq 0$  und  $\varepsilon > 0$ .

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s(A) = \inf \left\{ \sum_i |B_i|^s : A \subseteq \bigcup_i B_i, \quad |B_i| \leq \varepsilon \right\}$$

Dabei sind  $B_i$  beliebige Mengen mit Durchmesser  $|B_i| \leq \varepsilon$ .

Die Maßzahl  $\mathcal{H}_\varepsilon^s$  entspricht für  $s = 1$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  per Definition (für normale Intervalle als Überdeckung)  $B_i$  offenbar dem Lebesgue-Maß.  $\mathcal{H}_\varepsilon^s$  ist daher eine Art gewichtetes Lebesgue-Maß.

# Hausdorff-Maße



Berechnung von  $\mathcal{H}_\varepsilon^s = \inf \left\{ \sum_i |B_i|^s : A \subseteq \bigcup_i B_i, \quad |B_i| \leq \varepsilon \right\}$



# Hausdorff-Maße

**Beispiel:**

$\mathcal{H}_\varepsilon^0(\mathbb{R}) = \infty$ , da  $\sum_i |B_i|^0 = \sum_i 1 = \infty$  für jede Überdeckung von  $\mathbb{R}$ :

Man kann  $\mathbb{R}$  nicht mit endlich vielen Intervallen endlicher Länge überdecken.

# Hausdorff-Maß

## Definition

Das **äußere Hausdorff-Maß** wird durch

$$\overline{\mathcal{H}}^s(A) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon^s(A)$$

definiert.

# Äußere Maße

Das äußere Hausdorff-Maß und das äußere Lebesgue-Maß stellen sogenannte **äußere Maße** dar.

## Definition

Sei  $X$  eine Menge. Ein **äußeres Maß** auf der Potenzmenge  $\mathfrak{P}(X)$  ist eine Funktion  $\overline{\mathcal{M}} : \mathfrak{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  mit

- 1  $\overline{\mathcal{M}}(\emptyset) = 0$
- 2 Aus  $A \subset B$  folgt  $\overline{\mathcal{M}}(A) \leq \overline{\mathcal{M}}(B)$
- 3 Abzählbare Subadditivität: Sei  $(A_i)$  eine abzählbare Folge von Teilmengen von  $X$ . Dann gilt

$$\overline{\mathcal{M}}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \overline{\mathcal{M}}(A_i)$$

# Hausdorff-Maß und Lebesgue-Maß

## Satz

Es gibt  $a_n, b_n > 0$ , so dass für jede Borel-Menge  $B \subset \mathbb{R}^n$  gilt

$$a_n \mathcal{L}^n(B) \leq \mathcal{H}^n(B) \leq b_n \mathcal{L}^n(B)$$

Für  $n = 1$  folgt sogar die Gleichheit.

# Hausdorff-Dimension

## Satz

Es gibt genau einen Wert  $s$  für den  $\overline{\mathcal{H}}^s(A)$  von  $\infty$  auf 0 springt.  
Dieser Wert heißt **Hausdorff-Dimension** von  $A$ .

# Hausdorff-Dimension

Für die Cantor-Menge  $C$  ist die Hausdorff-Dimension mindestens 0, da  $\sum_i |B_i|^s$  für  $s = 0$  immer unendlich bleibt ( $C$  enthält unendlich viele Punkte).

Die Hausdorff-Dimension ist höchstens 1, da  $\sum_i |B_i|^s$  für  $s = 1$  beliebig schnell gegen 0 geht.

Der genaue Wert liegt bei  $\log_3 2$ , also bei der Kapazitätsdimension von  $C$ .

# Hausdorff-Dimension und Kapazitätsdimension

## Satz

Es gilt

$$\dim(A) \leq d_C(A)$$

Erfüllt ein kontrahierendes IF die OSC-Bedingung von Moran, also

- 1 es eine offene Menge  $U$  gibt mit  $f_i(U) \subset U$  für alle  $i$ ,
- 2  $f_i(U) \cap f_j(U) = \emptyset$  für alle  $i, j$ .

dann gilt sogar

$$\dim(A) = d_C(A)$$

# Eigenschaften der Hausdorff-Dimension

- $\dim(\emptyset) = 0$  Das ist jedoch Konvention, da  $\mathcal{H}^s$  für kein  $s \in \mathbb{R}$  springt, sondern immer 0 ist. Man könnte daher auch  $\dim(\emptyset) = -1$  oder  $\dim(\emptyset) = -\infty$  definieren.
- Für  $A \subset B$  gilt  $\dim(A) \leq \dim(B)$ .
- Für  $A = \bigcup_j A_j$  gilt  $\dim(A) = \sup_j \dim(A_j)$ .
- Für  $A$  endlich oder abzählbar folgt  $\dim(A) = 0$ .
- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$
- Für  $A \subset \mathbb{R}^n$  gilt  $0 \leq \dim(A) \leq n$ .



# Eigenschaften der Hausdorff-Dimension

- Ist  $\phi : M \rightarrow M$  Lipschitz-stetig  
( $\forall x_1, x_2 \in M : \|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \leq L \cdot \|x_1 - x_2\|$ ), so gilt

$$\dim(\phi(A)) \leq \dim(A)$$

- Gibt es eine Lipschitz-stetige Inverse  $\phi^{-1}$ , so folgt

$$\dim(\phi(A)) = \dim(A)$$

Dies gilt somit insbesondere für Ähnlichkeiten.

- Zur Berechnung genügt es, sich auf einen Typ von überdeckenden Mengen zu beschränken, z.B. Kugeln oder Quader.

# Bogenlänge und Hausdorff-Maß

## Definition

Sei  $M$  ein metrischer Raum,  $f : [0, 1] \rightarrow M$  parametrisiere eine Kurve  $C$ . Diese Kurve kann durch Polygonzüge approximiert werden. Existiert das Supremum der Längen dieser Polygonzüge, so nennt man es **Bogenlänge**  $l$  der Kurve.

## Satz

Für  $C = f([0, 1])$  gilt

$$\textcircled{1} \quad l = \int_0^1 |f'(x)| \, dx$$

$$\textcircled{2} \quad l \geq \mathcal{H}^1(C)$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Für injektives } f \text{ gilt } l = \mathcal{H}^1(C).$$

# Bogenlänge und Hausdorff-Dimension

## Satz

Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig, also  $C = f([0, 1])$  eine Kurve. Gilt  $\dim(C) > 1$ , so folgt  $l = \infty$ .

# Bogenlänge und Hausdorff-Dimension

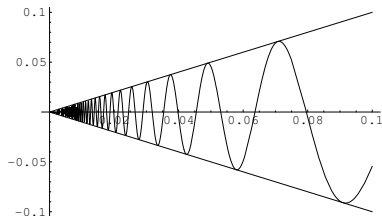
Die Umkehrung stimmt normalerweise nicht:

Sei

$$f(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \sin(1/t) \end{pmatrix}$$

$C$  hat dann Hausdorff-Dimension 1, jedoch  $l = \infty$ .

# Bogenlänge und Hausdorff-Dimension



**Beweis:**

Sei  $C_i := f([1/i, 1])$ . Offenbar gilt  $C \setminus \{0, 0\} = \lim_{i \rightarrow \infty} C_i$ .

Da  $f$  überall außer in  $(0, 0)$  Lipschitz-stetig ist, gilt  $\dim(C_i) = 1$ , also auch  $\dim(C \setminus \{0, 0\}) = 1$ , somit  $\dim(C) = 1$ .

# Unendlichdimensionale Mengen

Gibt es unendlichdimensionale Mengen?

## Satz

Es sei  $l^2$  der Raum der **quadratisch summierbaren Folgen**:

$$l^2 := \left\{ (x_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum |x_i|^2 < \infty \right\}$$

$B$  sei eine (nicht kompakte) Kugel in  $l^2$ :

$$B := \{x \in l^2 : \|x\| \leq 1\}$$

Dann gilt  $\dim(B) = \infty$ .

# Unendlichdimensionale Mengen

## Beweis.

Sei  $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ , die Projektion von  $B$  auf den  $\mathbb{R}^n$ .  
Angenommen  $\dim(B) < \infty$ . Dann existiert ein  $n > \dim(B)$ .

Andererseits gilt  $B_n \subset \mathbb{R}^n$ , also  $\dim(B_n) \geq n$ .

Über eine Einbettung von  $B_n$  folgt  $B \supset B_n$ , also

$\dim(B) \geq \dim(B_n) \geq n$ .

Widerspruch!



# Packungsdimension

Die Packungsdimension ist eine weitere Möglichkeit eine maßtheoretische Dimension zu definieren.

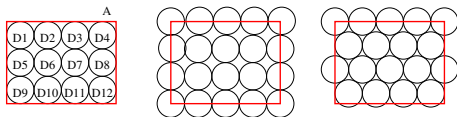
**Idee:** Platziere so viele *disjunkte* Kugeln mit Zentren in der Menge  $F$  wie möglich.

Für den Kugelradius  $\rightarrow 0$  wird eine Zahl gesucht, die die Dimension beschreibt.



# Kugelpackung

Es bezeichne  $\mathcal{D}_\varepsilon(F)$  eine Menge von disjunkten Kugeln mit Radius höchstens  $\varepsilon$  und Mittelpunkt in  $F$ .



Verschiedene Kugelpackungen  $\mathcal{D}_\varepsilon(F)$ , für große  $\varepsilon$  ist die mittlere optimal, bei kleineren die rechte

# Größter Kugelpackungsinhalt

## Definition

Für  $\varepsilon, s > 0$  setze

$$\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^s(F) := \sup_{\mathcal{D}_\varepsilon(F)} \left\{ \sum_{B \in \mathcal{D}_\varepsilon(F)} |B|^s \right\}$$

$\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^s(F)$  heißt **größter Kugelpackungsinhalt** von  $F$ .

# Größter Kugelpackungsinhalt

Beachte: Die größte Kugelpackung für ein festes  $\varepsilon$  erlaubt auch das Ausfüllen der inneren Lücken mit beliebig kleinen Kugeln. Der größte Kugelpackungsinhalt entspricht also dem Inhalt der Menge  $F$  plus einem von  $\varepsilon$  abhängigen Exzess. Es gilt also:

## Satz

$\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^s(F)$  ist für  $\varepsilon \rightarrow 0$  eine monoton fallende Funktion.

# Packungsindex

Setze

$$\tilde{\mathcal{P}}^s(F) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^s(F) = \inf_{\varepsilon > 0} \tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon^s(F)$$

## Satz

Es gibt ein  $s_0 \in [0, \infty]$  mit

$$\tilde{\mathcal{P}}^s(F) = \infty \text{ für alle } s < s_0$$

$$\tilde{\mathcal{P}}^s(F) = 0 \text{ für alle } s > s_0$$

$s_0$  heißt **Packungsindex** von  $F$ .

# Packungsindex

Das Infimum der größten Kugelpackungsinhalte  $\tilde{\rho}^s$  ist kein äußeres Maß, somit ist der Packungsindex keine Dimension im Sinne unserer vorherigen Dimensionsbegriffe.

## Beweis.

Sei  $K = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\} \subset \mathbb{R}$ .  $K$  ist damit eine kompakte Menge aus isolierten Punkten.

Sei  $k \in \mathbb{N}$  ungerade,  $\varepsilon = 2^{-k}$  und  $n = 2^{(k-1)/2}$ .

Dann gilt für den Abstand zweier Punkte  $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n^2} = 2\varepsilon$ .

Eine Menge von Intervallen mit Durchmesser  $2\varepsilon$  und Mittelpunkten in  $K$  ist also disjunkt. Es folgt:

$$\tilde{\rho}_{2\varepsilon}^{1/2}(K) \geq \underbrace{n(2\varepsilon)^{1/2}}_{\text{Inhalt der Intervalle}} = 1$$

daher  $\tilde{\rho}^{1/2} \geq 1 > 0$  (für ein äußeres Maß müsste  $= 0$  gelten). □

# Packungsmaß

Das Infimum der größten Kugelpackungsinhalte lässt sich allerdings in zwei Schritten zu einer Dimension ausbauen:

## Definition

Sei  $\mathcal{C}(F)$  die Menge aller abzählbaren Intervallüberdeckungen von  $F$ . Dann heißt

$$\bar{\mathcal{P}}^s(F) := \inf \left\{ \sum_{C \in \mathcal{C}(F)} \tilde{\mathcal{P}}^s(C) \right\}$$

**äußeres Packungsmaß** von  $F$ .

# Packungsdimension

Zu diesem äußeren Packungsmaß existiert genau wie im Hausdorff- und Lebesgue-Fall ein **Packungsmaß**  $\mathcal{P}^s$ .

## Satz

Es gibt genau einen kritischen Wert  $Dim(F) := s_0 \in [0, \infty]$  mit

$$\mathcal{P}^s(F) = \infty \text{ für alle } s < s_0$$

$$\mathcal{P}^s(F) = 0 \text{ für alle } s > s_0$$

$Dim(F)$  heißt dann **Packungsdimension** von  $F$ .

# Dimensionsbegriffe

Zusammenfassend gilt:

## Satz

Sei  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Borel-Menge. Dann gilt

$$\text{ind}(F) \leq \text{dim}(F) \leq \text{Dim}(F) \leq d_s(F)$$

Dies motiviert Taylors Definition eines Fraktals:

## Definition

Sei  $F \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $F$  heißt **Fraktal** falls:

$$\text{ind}(F) < \text{dim}(F) = \text{Dim}(F) = d_s(F)$$



# Abstände von Funktionen

Quadratischer Abstand zweier Funktionen:

$$\begin{aligned}d(f, g) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - g(t))^2 dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 + g(t)^2 dt}_{\text{„Normierungsanteil“}} - 2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt}_{\text{„Abstandsanteil“}}\end{aligned}$$

# Harmonische

Cosinus- und Sinusfunktionen werden gemeinsam als **Harmonische** bezeichnet.

Sinusfunktion mit Kreisfrequenz  $\omega$ :  $\sin(\omega t)$

Cosinusfunktion mit Kreisfrequenz  $\omega$ :  $\cos(\omega t)$

Gemeinsame Darstellung über die **Eulersche Identität**:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \cos(\omega t) = \frac{1}{2} e^{i\omega t} + \frac{1}{2} e^{-i\omega t}$$

$$\text{und } \sin(\omega t) = \frac{1}{2i} e^{i\omega t} - \frac{1}{2i} e^{-i\omega t}$$

# Fouriertransformation

Die Formel

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt}$$

„Abstandsanteil“ des quad. Abstands

bestimmt den Frequenzanteil zur Kreisfrequenz  $\omega$  in der Funktion  $f$ .

$F(\omega)$  kann also als eine Frequenzzzerlegung von  $f$  gesehen werden.  $F$  heißt **Fourier-Transformierte** von  $f$ .

# Fourierrücktransformation

Die Fouriertransformation ist so definiert, dass die Rücktransformation ähnliche Form hat:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Sie übersetzt ein Frequenzspektrum zurück in einen Zeitverlauf.

# Trigonometrisches Polynom

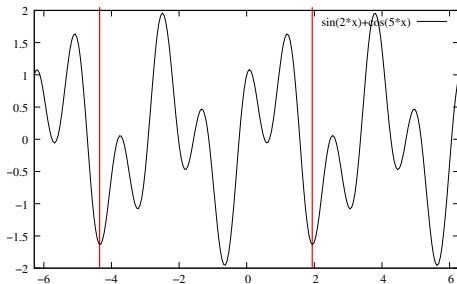
Jede endliche Überlagerung von Harmonischen mit ganzzahligen Vielfachen einer Kreisfrequenzen  $\omega$  kann also als ein **trigonometrisches Polynom**

$$\tau(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{ik\omega t}$$

dargestellt werden.

Die resultierende Funktion  $\tau$  ist natürlich periodisch mit Frequenz  $2\pi/\omega$ , also Periodendauer  $\omega/2\pi$ .

# Trigonometrisches Polynom



Trigonometrisches Polynom  $\sin(2t) + \cos(5t)$

Da  $\text{ggT}(2, 5) = 1 = \omega$  ist die Periodendauer  $T = 2\pi$ .

# Fouriertransformation und trigonometrisches Polynom

## Satz

Ist eine Funktion auf einem endlichen Träger, z.B.  $[0, 2\pi]$  definiert, so kann man sie als eine periodische Funktion auffassen durch die Fortsetzung  $\hat{f}(x) := f(x \bmod 2\pi)$ . Dann nimmt die Fouriertransformierte  $F$  nur an diskreten Stellen  $\omega \in \mathbb{Z}$  Werte ungleich Null an.

Umgekehrt konvergiert (unter gewissen Bedingungen) eine Fourierreihe gegen die Fouriertransformierte, wenn die Periodendauer gegen  $\infty$  geht.

# Fouriertransformation und trigonometrisches Polynom

## Satz

Sei  $\tau^n$  die Menge aller trigonometrischen Polynome vom Grad  $n$  und  $f \in \mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ , dann gilt für die **Fourierreihe**

$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-n}^n \alpha_k e^{ikt}$  mit  $\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}$ , dass der Ausdruck

$$\|f - u\|_{\mathcal{L}^2}$$

minimal wird.



# Fourierreihe und trigonometrisches Polynom

- Eine Fourierreihe ist also im Raum der trigonometrischen Polynome die optimale Approximation.
- Die Monome  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}$  bilden eine Orthonormalbasis von  $\tau^n$ .
- Ist  $f$  um  $t_0$  Lipschitz-stetig, dann konvergiert die Fourierreihe um  $t_0$  gegen  $\frac{1}{2}(f(t_0+) + f(t_0-))$ .
- Ist  $f$  stetig und stückweise stetig differenzierbar, dann konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen  $f$ .
- Konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen eine Funktion  $\tilde{f}$ , so ist  $f = \tilde{f}$  fast überall.

# $n$ -dimensionale Fouriertransformation

## Definition

Sei  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Die  $n$ -dimensionale Fouriertransformierte ist definiert als

$$F(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

mit  $\omega \in \mathbb{R}^n$ .

Im folgenden Bezeichnet  $\mathcal{F}(f)$  die (evtl.  $n$ -dim.) Fourier-Transformierte von  $f$ .

# Eigenschaften der Fouriertransformation

- Linearität:  $\mathcal{F}(\alpha f + g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$
- $n$ -fache Differentiation geht über in Multiplikation und umgekehrt:  $\mathcal{F}(D^\alpha f) = x^\alpha \mathcal{F}(f)$  ( $\alpha \in \mathbb{R}^n$  ist ein Multiindex).
- Faltung geht in Produkt über und umgekehrt:  
 $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$  und  $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$ . (Faltung:  
 $f * g(x) = \int f(x - y)g(y) dy$ )

# Periodische Funktionen

Ist  $f$  periodisch, so ist  $F$  diskret.

Die Rücktransformation einer periodischen Funktion  $f$  ergibt sich also durch eine unendliche Reihe:

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} F(i\omega) e^{ij\omega t}$$

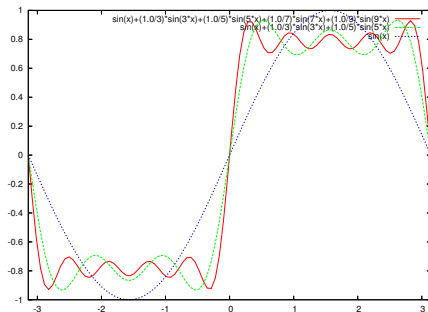
# Periodische Funktionen

Durch eine endliche Reihe  $f(t) = \sum_{j=0}^n F(j\omega)e^{j\omega t}$  kann also eine Approximation einer periodischen Funktion gewonnen werden. Da hier nur tiefe Frequenzen beteiligt sind, entspricht dies einer Tiefpassfilterung.

# Rechtecksignal

Beispiel: Fourierreihe des Rechtecksignals mit Kreisfrequenz  $\omega$

$$\text{ist } f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \sin((2j+1)\omega t)$$



# Diskrete Fouriertransformation

- Bekannt: Ist  $f$  periodisch, so ist  $F$  diskret.
- Analog gilt: Ist  $F$  periodisch, so ist  $f$  diskret.
- Es folgt: Ist  $f$  periodisch und diskret, so ist auch  $F$  periodisch und diskret.
- Diese Kombination (p-d  $\rightarrow$  p-d) ergibt die **diskrete Fouriertransformation**.

# Diskrete Fouriertransformation

Die diskrete Fouriertransformation bildet eine Folge von Impulsen (über der Zeit)  $(x_1, \dots, x_n)$  auf eine Folge von Impulsen (über der Frequenz)  $(y_1, \dots, y_n)$  ab.

Sie kann daher als eine lineare Abbildung  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  aufgefasst werden.

Diese kann durch eine Matrix  $\mathcal{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  dargestellt werden:

$$\vec{y} = \mathcal{F}(\vec{x}) = \mathcal{M}\vec{x}$$



# Diskrete Fouriertransformation

Darstellung der DFT als Matrix. Es gilt:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Ist nun  $f$  eine Distribution mit

$$f(t) = \begin{cases} \delta_{x_j} & \text{für } t \in \{-n, \dots, n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

so folgt

$$F(\omega) = \sum_{j=-n}^n x_j e^{-i\omega j}$$

# Diskrete Fouriertransformation

Also, da  $F$  diskret ist

$$y_k = F(k) = \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-ijk}$$

Dies entspricht einer Multiplikation mit der Matrix

$$\mathcal{M} = (m_{jk}) = e^{-ijk}$$

# Schnelle Fouriertransformation

Die sogenannte **schnelle Fouriertransformation** (*fast Fourier transform, FFT*) bezeichnet einen Algorithmus zur effizienten Berechnung einer DFT.

Normalerweise benötigt eine Matrizenmultiplikation einen Zeitaufwand  $O(n^2)$ . Ausgenutzt wird nun, dass die Matrix  $\mathcal{M}$  symmetrisch ist:

$$e^{-ijk} = e^{-ikj}$$

Damit lässt sich der Berechnungsaufwand auf  $O(n \log n)$  reduzieren.

# Schnelle Fouriertransformation

Es ist

$$y_k = \sum_{j=0}^{r-1} x_j e^{-ijk}$$

Seien nun für die Indizes  $j, k$  die binären Darstellungen

$$j = \sum_{l=0}^{r-1} j_l 2^{n-1-l}$$

$$k = \sum_{l=0}^{r-1} k_l 2^l$$

gegeben.

# Schnelle Fouriertransformation

Wir definieren eine Rekursion

$$X_0(j_0, \dots, j_{r-1}) = x_j$$
$$X_{s+1}(k_0, \dots, k_s, j_{s+1}, \dots, j_{r-1}) =$$
$$\sum_{t=0}^1 A_s(k_0, \dots, k_{s-1}, t, j_{s+1}, \dots, j_{r-1}) e^{t2^{n-1-s}(k_0 2^0 + \dots + k_s 2^s)}$$

Es gilt dann

$$A_r(k_0, \dots, k_{r-1}) = y_k$$

Der Berechnungsaufwand beträgt dann  $O(n \log n)$ .

# Zeitinvarianz

## Definition

Ein Operator  $L$  heißt **zeitinvariant**, wenn gilt

$$g(t) = \mathcal{O}(f(t)) \Leftrightarrow g(t - t_0) = L(f(t - t_0))$$

## Satz

Sei  $L$  ein linearer, zeitinvarianter Operator und  $g(t) = e^{i\omega t}$ .  
Dann gibt es eine Funktion  $h(\omega)$ , so dass  $L(g(t)) = h(\omega)g(t)$ .

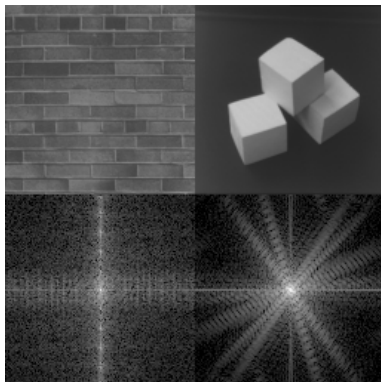
# Zeitinvarianz

Mittels dieses Satzes kann ein linearer, zeitinvarianter Operator  $L$  zerlegt werden:

$$F(\omega) = \int f(t) e^{-i\omega t} dt$$
$$\Rightarrow L(f(t)) = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega) h(\omega) e^{i\omega t} dt$$

# Anwendungsbeispiel

2D DFT zweier Beispielbilder (Betrag der DFT, aufskaliert):

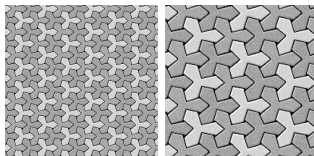


Quelle: <http://www.cs.unm.edu/~brayer/vision/fourier.html>



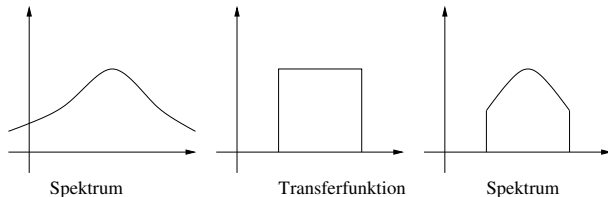
# Anwendung

- Die Fouriertransformation wird oft verwendet, um Periodizitäten in Signalen zu analysieren,
- z.B. in der Bilderkennung, um Texturen unterschiedlicher Periodizität zu unterscheiden:



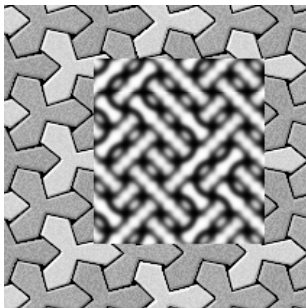
# Anwendung

- Weitere Anwendung: Ideale Filterung. Im Frequenzbereich kann einfach mit der gewünschten Transferfunktion multipliziert werden.



# Grenzen der Anwendung

Problem: Ändert sich die Periodizität eines Bildes oder Signals lokal (z.B. Musik), so vermischen sich die Spektren, weil die FT *global* wirkt:



# Fensterfunktion

Lösungsansatz: Versehe das Signal mit einer Fensterfunktion  $w(t)$ .

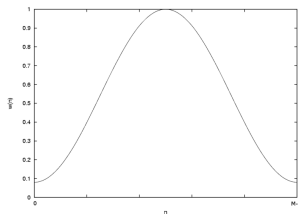
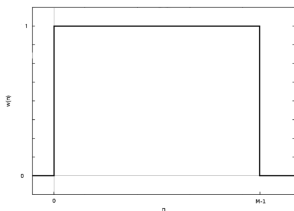
Es wird eine erweiterte Fouriertransformierte  $S\mathcal{F}(f)(\omega, \tau)$  berechnet, die um die Fensterposition  $\tau$  als Parameter ergänzt ist:

$$S\mathcal{F}(f)(\omega, \tau) := \mathcal{F}(w(t - \tau)f(t))(\omega)$$

Die Fensterfunktion sorgt dafür, dass immer nur lokale Bereiche transformiert werden. Dafür hat das Ergebnis eine Dimension mehr.

# Fensterfunktionen

Wahl der Fensterfunktion: Abhängig von der Anwendung.  
Einfache Fensterfunktionen haben oft „scharfe Kanten“,  
erzeugen also unerwünschte „Artefakte“ in den Spektren.



# Fensterfunktionen

Nachteil der Fensterfunktionen: „Gute“ Fensterfunktionen sind aufwändig zu berechnen, dem recht hohen Aufwand für die FT kommt noch der Aufwand für die Fensterfunktion dazu.

Dies führt zur Theorie der Wavelets.

# Hierarchische Zerlegung

Beispiel: Es sei eine endliche Folge von Zahlen gegeben.

9 7 3 5

Vorgehen: Mittele die Zahlen paarweise:

8 4      Abweichung:  $(1, -1)$  und  $(-1, 1)$

Und dies rekursiv:

6      Abweichung:  $(2, -2)$

# Hierarchische Zerlegung

Von den Abweichungen muss jeweils nur die erste Zahl  $a$  gespeichert werden, weil sich die zweite durch die Symmetrie als  $-a$  ergibt.

Wir können also die Zerlegung unserer Zahlenfolge wie folgt ablegen:

6 2 1 -1



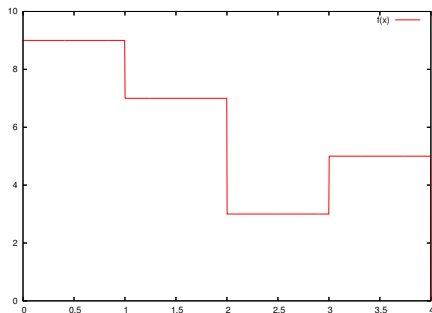
# Hierarchische Zerlegung

Ausgehend vom Gesamtmittel 6 kann die ganze Folge durch die Abweichungen (**Detailkoeffizienten**) rekonstruiert werden.

$$\begin{array}{c} 62 \quad 1 \quad -1 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ 84 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ 974 \\ \underbrace{\hspace{2.5cm}} \\ 9735 \end{array}$$

# Hierarchische Zerlegung

Andere Interpretation: Zahlenfolge als Treppenfunktion



9 7 3 5

# Hierarchische Basen

Eine Treppenfunktion (über dem Intervall  $[0, 1]$ ) kann als Vektor eines entsprechenden Vektorraums aufgefasst werden.

Angenommen: Die Treppenfunktion hat max.  $2^j$  Stufen. Dann

kann sie als Linearkombination  $f(x) = \sum_{i=0}^{2^j-1} a_i \phi_i^j(x)$  aufgefasst

werden.

$a_i$  sind dabei die Stufenhöhen,  $\phi_i^j$  sind die Basisfunktionen des entsprechenden  $j$ -dimensionalen Vektorraums. Es gilt:

$$\phi_i^j(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i/2^j \leq x < (i+1)/2^j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

# Hierarchische Basen

Die  $\phi_i^j$  bilden also je die Basis eines  $2^j$ -dimensionalen Vektorraums  $V^j$ .

Diese Räume haben die Ketteneigenschaft:

$$V^0 \subset V^1 \subset \dots \subset V^n \subset \dots$$

Alle Treppenfunktionen niedriger Auflösung besitzen also eine Darstellung in den höher aufgelösten Räumen.

# Hierarchische Approximation

Mittels dieser hierarchischen Basen ergibt sich nun eine andere Interpretation unserer Folge  $6 \ 2 \ 1 \ -1$ :

- 6 ist der Koeffizient für die beste Approximation im Raum  $V^0$ , nämlich das Gesamtmittel.
- 2 ist der Koeffizient der Differenz zur besten Approximation im Raum  $V^1$ .
- 1 – 1 sind die Koeffizienten der Differenz zur besten Approximation im Raum  $V^2$ .

# Wavelets

Wir bezeichnen den Orthogonalraum zwischen  $V^j$  und  $V^{j+1}$  als  $W^j$ .

Die Differenzfunktion zwischen einer Approximation und der nächsthöheren Verfeinerung liegt genau in  $W^j$ .

## Definition

Eine Basis von  $W^j$  bezeichnen wir als **Wavelets**.

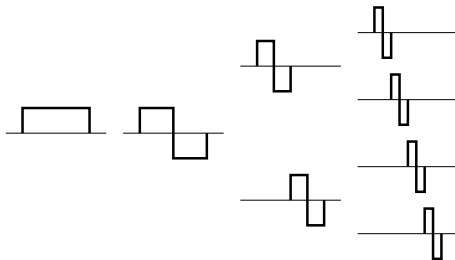
# Wavelets

Zwei Eigenschaften folgen direkt aus der Definition:

- Die Basis von  $V^j$  ergänzt um die Wavelets aus der Basis  $W^j$  bilden eine Basis von  $V^{j+1}$ .
- Jedes Wavelet von  $\psi_i^j$  von  $W^j$  ist orthogonal zu jeder Basisfunktion  $\phi_i^j$ .

# Haar-Wavelets

Wählen wir als Kette von Vektorräumen die Räume der Treppenfunktionen, so ergeben sich als Wavelets die sog. **Haar-Wavelets**:





# Eigenschaften von Wavelets

- Mittelwertfreiheit:  $\int_{\mathbb{R}} \psi_i^j dx = 0$
- Manche Wavelets (z.B. Haar-Wavelets) sind sogar paarweise orthogonal:  $\int_{\mathbb{R}} \psi_i^j \psi_k^j dx = 0 \leftrightarrow k \neq i$
- Da die Wavelets Basen für die jeweiligen Orthogonalräume darstellen, lassen sich die Detailkoeffizienten auch durch Projektion auf das Wavelet gewinnen: Sei  $f^{(j)}$  die beste Approximation von  $f$  in  $V^j$ . Dann erhält man den Detailkoeffizienten  $w_i^j$ :

$$w_i^j = \int_{\mathbb{R}} (f - f^{(j)}) \cdot \psi_i^j dx$$

# Satz von Calderon

## Satz

Es sei nun eine Basis der  $W^j$  gegeben. Zu jedem  $\psi_i^j$  sei  $\hat{\psi}_i^j$  die Fourier-Transformierte.

Gilt nun

$$w_i^j = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}_i^j(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

dann lässt sich  $f$  aus den Detailkoeffizienten rekonstruieren.

Im reellen folgt aus dem Satz von Calderon die Mittelwertfreiheit der Wavelets.

# Diskreter Fall

Im diskreten Fall lauten die Wavelets für unser Beispiel:

$$\phi_0^0 = [1, 1, 1, 1]$$

$$\psi_0^0 = [1, 1, -1, -1]$$

$$\psi_0^1 = [1, -1, 0, 0]$$

$$\psi_1^1 = [0, 0, 1, -1]$$

# Diskreter Fall

Wir erhalten die Detailkoeffizienten durch:

$$v = 1/4[9, 7, 3, 5] \cdot [1, 1, 1, 1] = 6$$

$$w_0^0 = 1/4[9, 7, 3, 5] \cdot [1, 1, -1, -1] = 2$$

$$w_0^1 = 1/2[9, 7, 3, 5] \cdot [1, -1, 0, 0] = 1$$

$$w_0^1 = 1/2[9, 7, 3, 5] \cdot [0, 0, 1, -1] = -1$$

Beachte: Es wird eine Normierung benötigt, hier  $1/2^{(2-j)}$ .

# Erzeugung

Anstatt Wavelets und Skalierungsfunktionen „per Hand“ zu definieren, kann man sie aus einem Urwavelet  $\psi$ , bzw. einer Urfunktion  $\phi$  erzeugen:

$$\phi_i^j(x) := \phi(2^j x - i)$$

$$\psi_i^j(x) := \psi(2^j x - i)$$

mit  $\phi = \mathcal{X}_{[0,1]}$  und  $\psi = \mathcal{X}_{[0,1/2]} - \mathcal{X}_{[1/2,1]}$ .

Prinzip: Die Skalierung wird im Argument ausgeführt.

# Orthonormalität

Haar-Wavelets sind orthogonal, d.h. es gilt  $\psi_i^j \cdot \psi_k^j = 0$  gdw.  $i \neq k$ .

Durch Wahl einer passenden Normierung kann man daraus **orthonormale Wavelets** erhalten:

$$\phi_i^j(x) := \sqrt{2^j} \phi(2^j x - i)$$

$$\psi_i^j(x) := \sqrt{2^j} \psi(2^j x - i)$$

Es gilt dann  $\psi_i^j \cdot \psi_i^j = 1$ . Die erhaltenen Detailkoeffizienten ändern sich natürlich um  $1/\sqrt{2^j}$ .

## Codierung als Matrix

Zur Wavelet-Codierung haben wir den Zahlenvektor jeweils mit dem zugehörigen Wavelet multipliziert. Dies entspricht einer Matrixmultiplikation:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=:C} \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beachte: Der Aufwand hierfür ist eigentlich  $O(n^2)$  für  $n$  Werte. Dies ist für die Praxis zu hoch. Man verwendet daher den Algorithmus der schnellen Wavelet-Transformation (siehe Vertiefungskurs), der Aufwand ist dann im mittleren Fall  $O(n)$ .

# Diskrete Rekonstruktion

Die Codierungsmatrix  $C$  ist eine Basis, hat also vollen Rang. Ihre Inverse (bis auf Normierung) entspricht damit der Rekonstruktionsmatrix:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=C^{-1}} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Beachte: Weil die Matrizen orthogonal sind, ist die Inverse einfach die Transponierte. Im Allgemeinfall gilt das nicht!



## 2D-Wavelets

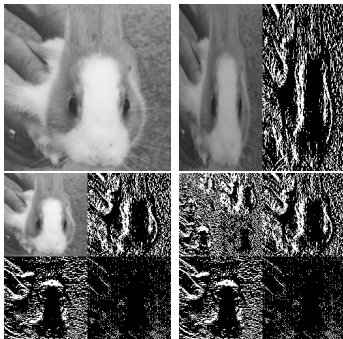
Für eine gegebene Wavelet-Basis  $\phi_0^0, \psi_0^0, \dots, \psi_{2^n-1}^n$  kann man durch *Tensorprodukt-Bildung*, also paarweise Multiplikation, eine zweidimensionale Basis erzeugen, z.B.:

$$\phi_0^0(x)\psi_1^1(y) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline - & - & - & - \\ \hline + & + & + & + \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \psi_0^1(x)\psi_0^1(y) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline - & + & 0 & 0 \\ \hline + & - & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Eine orthonormale Basis bleibt dabei orthonormal.

# Bildcodierung

Folgende Sequenz zeigt die schrittweise Transformation eines Bildes mit den einzelnen Wavelets:



# nD-Wavelets

Analog können  $n$ -dimensionale Wavelets erzeugt werden, indem für eine Basis  $u_1, \dots, u_k$  das  $n$ -dimensionale Tensorprodukt gebildet wird:

$$u_{i_1, \dots, i_n} := u_{i_1} \cdots u_{i_n}$$

für  $i_j \in \{1, \dots, n\}$

# Approximationsfehler

Sei  $f$  gegeben in einer Orthonormalbasis  $u_i$  durch  $f = \sum_{i=1}^n c_i u_i$  und eine Approximation durch Weglassen bestimmter Koeffizienten  $\hat{f} = \sum_{i=1}^m c_i u_i$  mit  $m < n$ .

ObdA. seien die Koeffizienten nach Größe geordnet, d.h.

$$c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n.$$

# Approximationsfehler

Der quadratische Approximationsfehler ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned}\|f - \hat{f}\|^2 &= \langle f - \hat{f}, f - \hat{f} \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=m}^n c_i u_i, \sum_{i=m}^n c_i u_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=m}^n \sum_{j=m}^n c_i c_j u_i u_j \\ &= \sum_{i=m}^n c_i^2\end{aligned}$$

wg. Orthonormalität

# Wavelet-Kompression

Die optimale Kompression mit  $m < n$  Koeffizienten erhält man also gerade durch Weglassen der  $n - m$  kleinsten Koeffizienten.

Daraus ergibt sich das **Prinzip der Wavelet-Kompression**:

- Berechne die Wavelet-Transformierte,
- setze die  $n - m$  kleinsten Koeffizienten auf 0,
- speichere die Koeffizienten bis auf die 0-Einträge.

# Kompression von Bildern

- Zur Kompression von 2D-Bildern kann dieselbe Technik eingesetzt werden.
- Problem: Die Datenmenge wächst quadratisch. Eine Sortierung der Koeffizienten hätte den Aufwand von mind.  $O(n^2 \log n^2)$  für ein Bild der Größe  $n \times n$ .
- Es werden daher meist andere Verfahren zum Finden der Schranke eingesetzt, ab der die Koeffizienten verworfen werden können.

# Kompression von Farbbildern

- Farbbilder liegen meist in einem 3- oder 4-dimensionalen Farbraum vor (z.B. RGB oder CMYK).
- Jeder Kanal kann hier separat Wavelet-komprimiert werden.
- Vorteil: Für Kanäle, auf die das Auge nicht empfindlich reagiert (z.B. blau), kann eine hohe Fehlerschranke angesetzt werden.

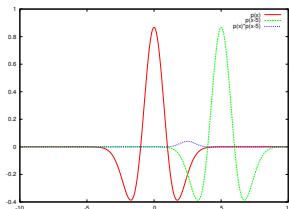


# Eigenschaften der Wavelettransformation

- Effizient:  $O(n)$  gegenüber  $O(n \log n)$  für die FFT.
- Sehr gute lokale Frequenzen, ähnlich der gefensterter FT. Tatsächliches Frequenzverhalten hängt von den verwendeten Wavelets ab.
- Dadurch auch zum gezielten Filtern verwendbar: durch Weglassen bestimmter Frequenzen.

# Mexikanerhut-Wavelet

Anderes bekanntes Wavelet: Mexikanerhut-Wavelet



$$\psi(t) = \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} \right) (1 - t^2) e^{-t^2/2}$$

Abgebildet sind zwei Wavelets und ihr Produkt.

Auffällig: Die Wavelets sind nicht orthogonal, allerdings fast orthogonal.

# Wünschenswerte Eigenschaften

- Orthogonalität: klar, wg. Fehlerminimierung bei Kompression
- Kompakter (endlicher) Träger: Bessere Implementierung im diskreten Fall
- Stetigkeit: wünschenswert für stetige Funktionen, bessere Approximation und begrenztes Band
- Symmetrie oder Antisymmetrie: wichtig für Anwendungen, die keine Vorzugsrichtung haben (z.B. Bildkompression)

# Wünschenswerte Eigenschaften

Problem: Einige Eigenschaften schließen sich gegenseitig aus.

So sind z.B. die Haar-Wavelets die einzigen orthogonalen, antisymmetrischen Wavelets *mit* endlichem Träger.

# Semiorthogonalität

Deshalb schwächt man Orthogonalität oft ab (um kompakten Träger und Stetigkeit zu erhalten):

## Definition

Wavelets heißen **semiorthogonal**, falls

$$\phi_i^j \cdot \psi_l^k = 0$$

für alle  $i, j, k, l$  gilt.

## Charakterisierung von Waveleträumen

Welche Funktionen lassen sich nun durch Wavelets überhaupt darstellen?

Nur Funktionen, die aus hierarchischen Basen darstellbar sind.

Dies sind genau die **Subdivision-Funktionen**.

# Subdivision-Funktionen

## Definition

Sei eine *Gewichtung*  $r = (\dots, r_{-1}, r_0, r_1, \dots)$  von reellen Zahlen gegeben, weiterhin eine Folge  $c_0 = (\dots, c_{0,-1}, c_{0,0}, c_{0,1}, \dots)$ . Eine Funktion  $f_j$  sei definiert als:

$$f_0(i) := c_{0,i}$$
$$f_j(i/2^j) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{j-1}((i+k)/2^j)$$

Achtung: Für ungerade  $k$  ist  $f_{j-1}((i+k)/2^j)$  zunächst undefiniert. Daher wird dieser Wert als  $1/2(f_{j-1}((i+k-1)/2^j) + f_{j-1}((i+k+1)/2^j))$  definiert.

# Subdivision-Funktionen

## Definition

Die Funktion

$$f := \lim_{j \rightarrow \infty} f_j$$

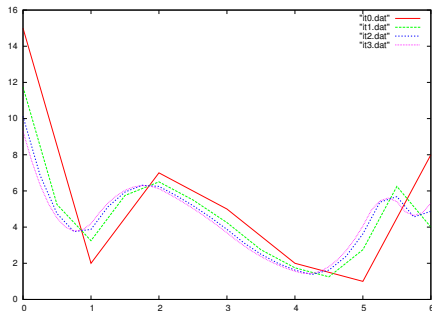
heißt dann **Subdivision-Funktion**.

Die Subdivision-Funktion ist abhängig von den Gewichten  $r$  und den Ausgangswerten  $c_0$ . Sie ist definiert, falls die Gewichte für die Folge  $f(x)$  zumindest punktweise Konvergenz zulassen.



# Subdivision-Funktion

Sogenannte Chaikin-Subdivision mit Gewichten  $c = (1/2, 1/2)$   
in vier Iterationen:



# Subdivision-Schema

- Sind die Gewichte unabhängig von  $i$ , so heißt ein Subdivision-Schema **uniform**.
- Uniforme Schemata sind meist nicht Endpunkt-Interpolierend (siehe vorheriges Bild).
- Sind die Gewichte unabhängig von  $j$ , so heißt ein Subdivision-Schema **stationär**. Die Gewichte ändern sich dann nicht pro Iteration.
- Nicht-stationäre Schemata sind weitgehend unerforscht.

# Subdivision-Schemata

Für viele Schemata sind die Funktionen-Klassen bekannt, die sich ergeben:

- $c = 1/2(1, 1)$  Haar-Funktionen
- $c = 1/4(1, 2, 1)$  kubische B-Splines

Beachte: die B-Splines sind auf ganz  $\mathbb{R}$  gegeben, daher nicht Endpunkt-interpolierend auf einem beschränkten Intervall.

# Subdivision-Schemata

Darstellung als Matrix:

$$c_{j+1} = \underbrace{R_j}_{\text{Subdivision-Matrix}} \underbrace{S_j}_{\text{Split-Matrix}} c_j$$

wobei

- $S_j$  eine rechteckige Matrix ist, die die Dimension von  $2^j$  auf  $2^{j+1}$  bringt und dabei die Zwischenwerte interpoliert,
- $R_j$  die eigentlichen Gewichte enthält.

# Subdivision-Matrix

Uniforme Subdivision-Matrix für kubische B-Splines:

$$R_j = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

Dieses Schema ist *nicht* Endpunkt-interpolierend.



# Hierarchische Basen

- Subdivision-Schemata erzeugen abhängig von den Ausgangswerten  $c$  über Linearkombinationen eine Folge von geschachtelten Räumen  $V^0 \subset V^1 \subset \dots$
- Basen dieser Räume lassen sich jeweils durch  $j$ -fache Subdivision aus den Ausgangswerten  $c_k := \delta_k$  erzeugen.
- Für verschiedene Gewichte  $r$ , bzw. Subdivision-Matrizen  $R$  ergeben sich so die Skalierungsfunktionen (als Grundlage der Wavelets).

# Charakterisierung der Wavelet-Räume

## Satz

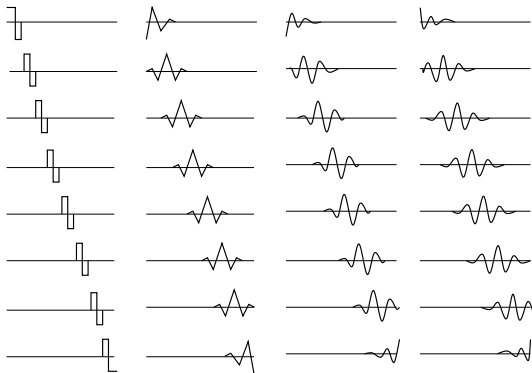
Die durch Wavelets darstellbaren Funktionen sind genau die auch durch Subdivision darstellbaren Funktionen.

Jeder Satz von Wavelets hat einen Satz zugehöriger Subdivision-Matrizen.



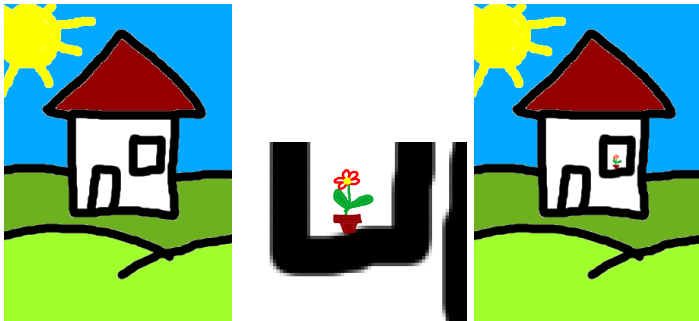
# B-Spline-Wavelets

Aus dem vorherigen Satz lassen sich z.B. die  
 Endpunkt-interpolierenden B-Spline-Wavelets verschiedenen  
 Grades erzeugen:



# Multiresolution-Editing

Mittels Haar-Wavelets kann eine Bitmap auf verschiedenen Auflösungsstufen bearbeitet werden:



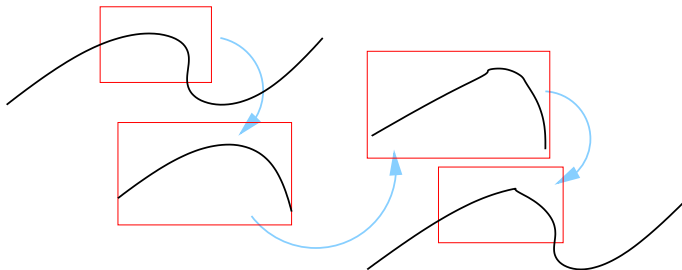
# Multiresolution-Editing

Vorgehen: Speichere nur die Wavelet-Koeffizienten  $\neq 0$ .

Vorteil: Nur Details, die wirklich da sind, werden gespeichert.  
Das Bild hat so lokal verschiedene Auflösungen, je nach Bedarf.

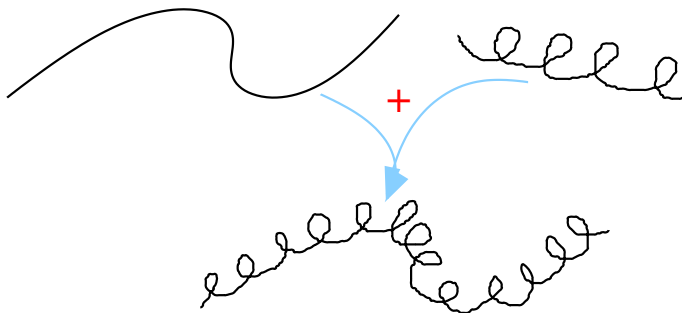
# Multiresolution-Editing

Diese Technik ist mit B-Spline-Wavelets auch für Kurven anwendbar:



# „Brush-Style“-Techniken

Das lokale Aussehen einer Kurve kann über einen (hochfrequenten) *Brush-Style* modifiziert werden, ohne das globale Aussehen zu verändern:



# Multiresolution-Darstellung

Für Boundary-Representations von 3D-Modellen kann eine Wavelet-Darstellung in Echtzeit verschiedene Auflösungsstufen generieren (z.B. für Flugsimulatoren):

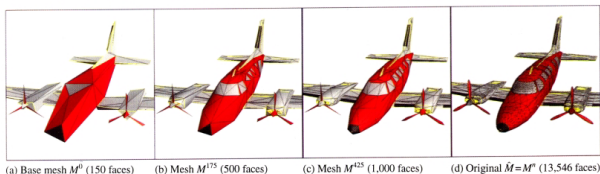


Figure 5: The PM representation of an arbitrary mesh  $\hat{M}$  captures a continuous-resolution family of approximating meshes  $M^0 \dots M^n = \hat{M}$ .

aus: Hoppe, et al., SIGGRAPH 96

# Lösung von Gleichungssystemen

Gegeben sei ein Gleichungssystem in Matrizenform:

$$Ax = b$$

Lösung geschieht analytisch durch Gauß-Verfahren.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

# Gauß-Verfahren

Lösung durch Transformation auf Diagonalfom:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ \hline 3 & 0 & 3 & 1/3 \\ 0 & 3 & 0 & 1/3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

Die Lösung ist also  $x = 1, y = 0$ .



# Lösung von Gleichungssystemen

In der Praxis wird nicht das Gauß-Verfahren angewandt, sondern numerische Verfahren, die die Lösung bestmöglich approximieren.

Diese Verfahren funktionieren effizienter, wenn die Matrix  $A$  schwächer besetzt ist, also (bei vollem Rang und guter Kondition) möglichst viele Null-Einträge aufweist.

Sei nun  $Q$  eine orthogonale Matrix. Anstatt  $Ax = b$  zu lösen, können wir auch

$$QAx = Qb \quad \Leftrightarrow \quad QAQ^t Qx =: QAQ^t z = Qb$$

lösen, um dann unsere Lösung  $x = Q^t z$  zu erhalten.

# Lösung von Gleichungssystemen

Wir betrachten nun die Matrix  $A$  als ein Grauwertbild. Wählen wir für  $Q$  eine orthogonale Waveletbasis, so enthält die Transformierte  $QAQ^t$  optimalerweise viele Einträge, die Null oder fast Null sind. Wir erhalten also eine approximierte Lösung durch Lösen von

$$Rx = Qb$$

wobei  $R$  die Matrix ist, die sich durch Waveletkompression aus  $QAQ^t$  ergibt, also durch Weglassen der jeweils kleinsten Einträge.

# Lösung von Gleichungssystemen

Mit  $R$  als Komprimierter der Transformierten  $QAQ^t$ , können wir eine Fehlermatrix  $E$  angeben, die genau die kleinsten Koeffizienten enthält:

$$E = QAQ^t - R \quad \Leftrightarrow \quad A = Q^t(R + E)Q$$

Man sieht leicht, dass  $R$  nicht notwendigerweise vollen Rang behalten muss, dass Verfahren ist also nur geeignet, falls dies gewährleistet ist.

Bei einer gut konditionierten Matrix  $A$  ist dies der Fall, denn diese ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix  $D$  mit großen Einträgen:

$$A = PDP^{-1}$$

wobei  $P$  Transformationsmatrix vollen Ranges ist.

## Lösung von Gleichungssystemen

Wir können nun den Fehler abschätzen, der durch die Waveletkompression von  $A$  erzeugt wird. Sei  $x_R$  die Lösung der Gleichung  $RQx_R = Qb$ , also die fehlerbehaftete Lösung. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\|x - x_R\|}{\|x\|} &= \frac{\|A^{-1}b - Q^t R^{-1} Qb\|}{\|A^{-1}b\|} \\ &= \frac{\|(R + E)^{-1} - R^{-1}\|}{\|(R + E)^{-1}\|} \\ &= \|R + E\| \cdot \|(R + E)^{-1} - R^{-1}\| \\ &= \|I - (I + ER^{-1})\| \\ &= \|E\| \cdot \|R^{-1}\|\end{aligned}$$

wobei  $I$  die Einheitsmatrix darstellt.